Université de Caen
Basse - Normandie

Culture Scientifique de Base en Sciences pour l'ingénieur

Le Signal :
objet central de l'E.E.A.

1. **Introduction et définitions**
2. Une première modélisation
3. Le signal sinusoïdal
4. Analyse fréquentielle ou Analyse de Fourier
5. Un exemple d'utilisation Le DTMF
6. Notion de spectre

Vers la notion de signal et d'information

- bouche → air → oreille
- bouche ↘ pot vide → corde → pot vide ↗ oreille
- bouche ↘ micro → conducteur → haut-parleur ↗ oreille ▪
  - même message transmis
  - mais pourtant, phénomènes physiques très différents (acoustique, mécanique, électricité ...)

- vibration de l'air, ondulation de la corde, mouvement des électrons
  - la variation d'un paramètre porte le message
  - description commune sans prise en compte du média

Le signal : une notion très commune

- Être humain = grand utilisateur de signaux
- La nature et le monde du vivant fournissent une multitude de signaux : signes, sons, odeurs…
- L’homme les détecte et les interprète grâce à ses capteurs : œil, oreille, goût, toucher, nez.
- L’homme code les signaux : langage…
- Il les mélange : association du son, de l’image,…
- Les signaux sont les seuls éléments à notre disposition pour percevoir l’univers et communiquer. L’homme cherche à comprendre les signaux des autres entités et à en créer de nouveaux.

Une définition

- **signal :**

Un signal est la représentation physique de l'information, qu'il convoie de sa source à son destinataire.

C'est donc une grandeur physique issue d'une mesure (par ex, la température, la pression, le son, l'image, la vitesse d'un mobile, sa position ....)

- **bruit :**

On appelle bruit tout phénomène perturbateur (interférence, bruit de fond, ...) gênant la perception ou l'interprétation du signal. Le bruit est un signal non désiré.

Théorie et traitement du signal (1)

- **Théorie du signal :**

donner une description mathématique des signaux

– La théorie du signal donne les outils pour caractériser un signal, sous une forme mathématique « commode ».

– La théorie du signal utilise :

  - l'algèbre linéaire et l'analyse fonctionnelle,
  - la théorie des processus aléatoires,
  - la physique générale.

Théorie et traitement du signal (2)

- **Traitement du signal :**

C'est la discipline technique qui réalise la conception et/ou l'interprétation des signaux (à partir de la théorie du signal).

- Le traitement du signal utilise :
  - l'électronique,
  - l'informatique,
  - la physique appliquée.

Les enjeux du traitement du signal

- Nécessité de mesurer et observer les signaux ➔ capteurs et instruments de mesure.
- Les signaux sont souvent superposés (mélangés entre eux), nécessité de les séparer ➔ traitement de signal.
- Pour transmettre un signal, il est utile de le crypter (confidentialité), de le coder (amélioration de la vitesse de transmission, de la capacité de stockage, ...)
➔ traitement de signal.
- Concevoir les dispositifs permettant de travailler sur les signaux : composants, instruments, dispositifs de transmission...
➔ électronique du signal .
- Avoir une approche scientifique pour modéliser et travailler le signal ➔ outils mathématiques du signal.

1. Introduction et définitions
2. **Une première modélisation**
3. Le signal sinusoïdal
4. Analyse fréquentielle ou
   Analyse de Fourier
5. Un exemple d'utilisation Le DTMF
6. Notion de spectre

Vers une première modélisation du signal

- Comment décrire un signal ?
- Comment décrire son évolution temporelle ?
  - le signal est « fort », « faible » ?
  - le signal est « fluctuant », « figé » ?
  - le signal est « rapide », « lent » ?

- Nécessité d'une description plus précise et concise : les mathématiques

En électricité, puissance et énergie

Pour une résistance,

- Puissance instantanée : $p(t) = u(t)\, i(t) = R i(t)^2$ (en watt)

- Énergie dissipée entre t_1 et t_2 : $W_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} R\, i(t)^2\, dt$ (en joule)

- Puissance moyenne entre t_1 et t_2 : $P_{t_1,t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} W_{t_1,t_2} = \frac{R}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i(t)^2\, dt$

- On peut définir une énergie et une puissance totale :

$$W = R \int_{-\infty}^{+\infty} i(t)^2\, dt \qquad P = \lim_{\tau \to \infty} \frac{R}{\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} i(t)^2\, dt$$

AU SECOURS ! DES MATHEMATIQUES

- Pour comprendre, créer et décoder tous les signaux il est indispensable d'avoir une approche scientifique.
- Cette approche passe par une modélisation et, l'un des outils les plus puissants à notre disposition, c'est l'outil mathématique.
- Ce sont des mathématiques de haut niveau mais sympathiques.
- Comme toute science, le traitement de signal suit l'évolution de l'outil mathématique pour l'utiliser avec la meilleure efficacité. Ses problèmes suscitent aussi le développement de nouvelles mathématiques.

Il n'y a pas que des MATHEMATIQUES

Les sciences de l'ingénieur proposent sans cesse de nouveaux modèles et de nouvelles techniques dont l'application est en parallèle rendue possible par l'évolution de la technologie. Cela demande plusieurs compétences :

- en mathématiques appliquées,
- en Sciences physique pour avoir un minimum de compréhension des phénomènes traités ou utilisés,
- en informatique logicielle (soft) et matérielle (hard) (outils du vingtième et unième siècle omniprésents dans les applications),
- en électronique (l'informatique n'est pas la réponse à tout. L'électronique qui participe à la conception matérielle des ordinateurs propose par ailleurs bon nombre d'autres solutions originales...).

Grandeurs caractéristiques : valeur moyenne

Par définition pour un signal quelconque:

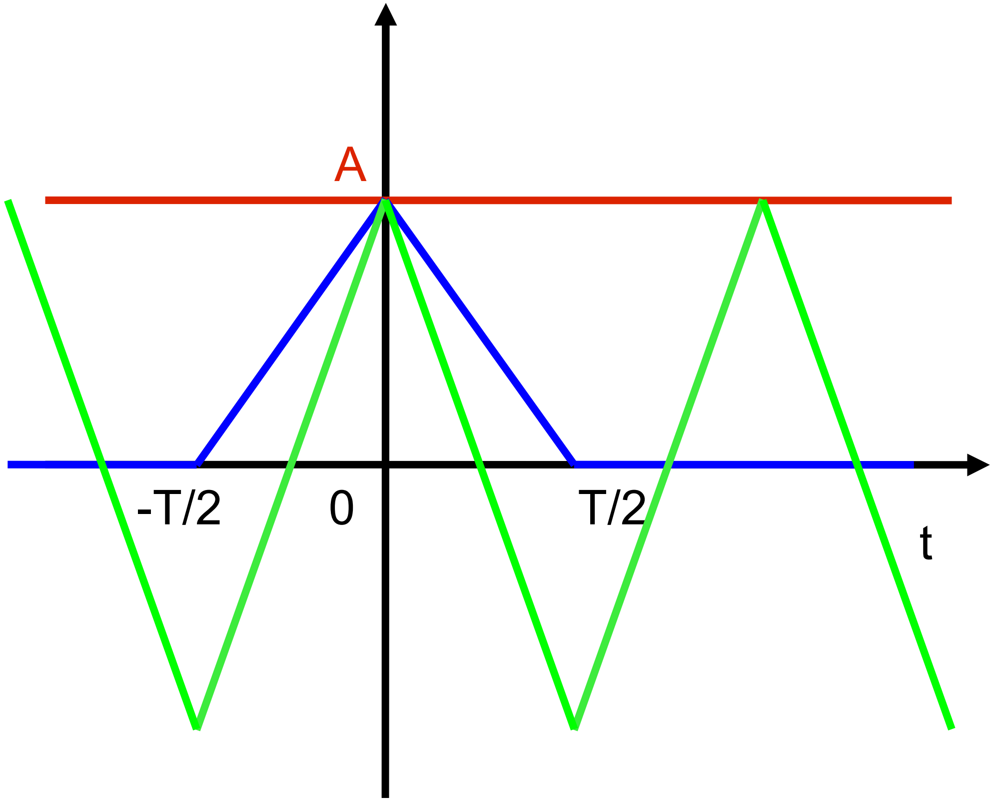
$$\overline{x} = \langle x \rangle = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} x(t)\, dt$$

Exemples:

$$\boxed{x(t) = A}$$

$$\boxed{x(t) = A \quad \Lambda\left(\frac{2t}{T}\right)}$$

$$\boxed{x(t) = A \quad triangle(t)}$$



Grandeurs caractéristiques : énergie totale

Par définition pour un signal quelconque:

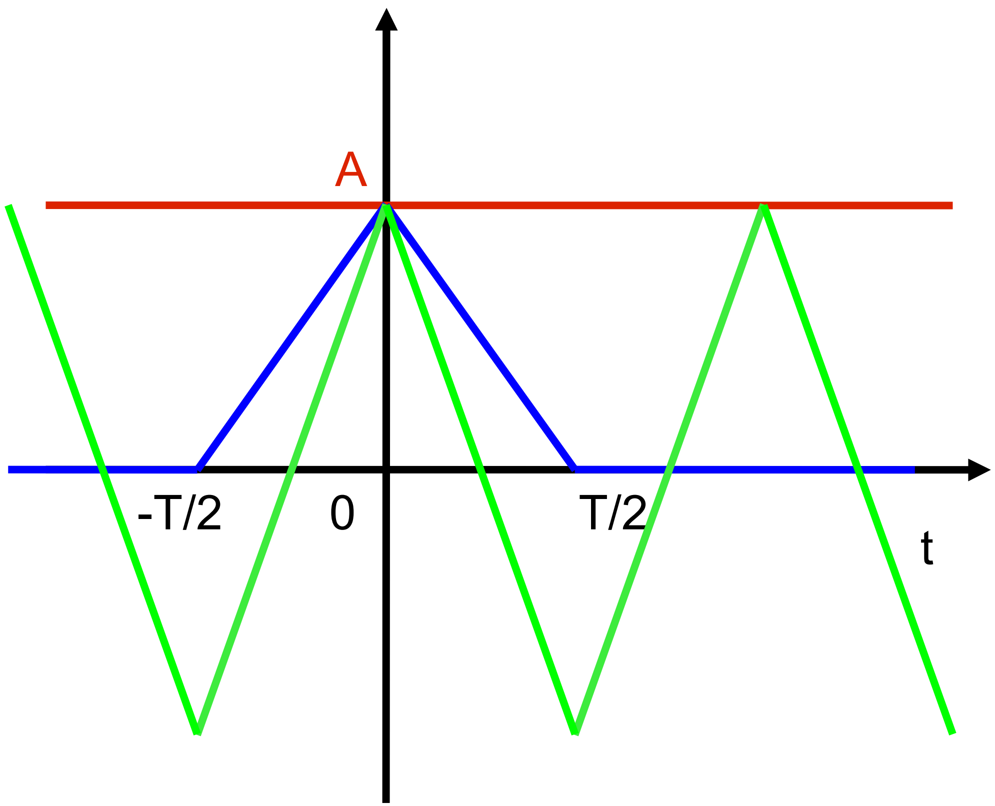
$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 \, dt$$

Exemples:

$$\boxed{x(t) = A}$$

$$\boxed{x(t) = A \quad \Lambda\left(\frac{2t}{T}\right)}$$

$$\boxed{x(t) = A \quad triangle(t)}$$



Commentaires ?

Grandeurs caractéristiques : <u>puissance moyenne totale</u>

Par définition pour un signal quelconque:

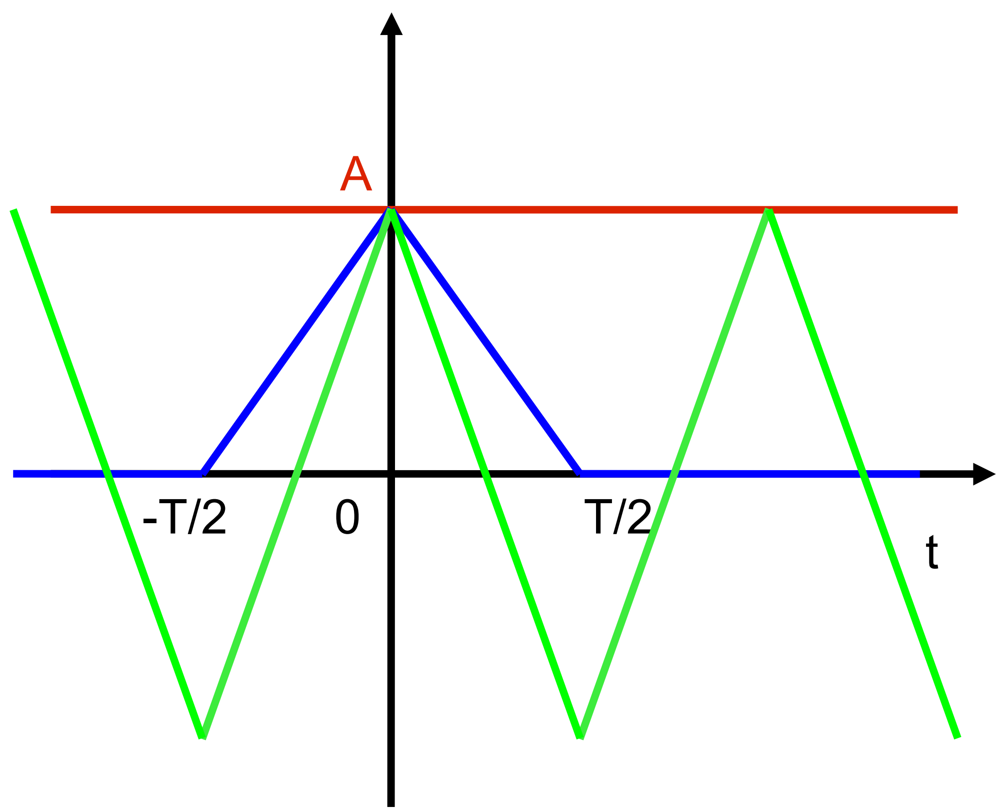
$$P_x = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} x(t)^2 \, dt = \overline{x(t)^2}$$

Exemples:

$$x(t) = A$$

$$x(t) = A \quad \Lambda\left(\frac{2t}{T}\right)$$

$$x(t) = A \quad triangle(t)$$



Commentaires ?

Grandeurs caractéristiques : valeur efficace

Par définition pour un signal quelconque:

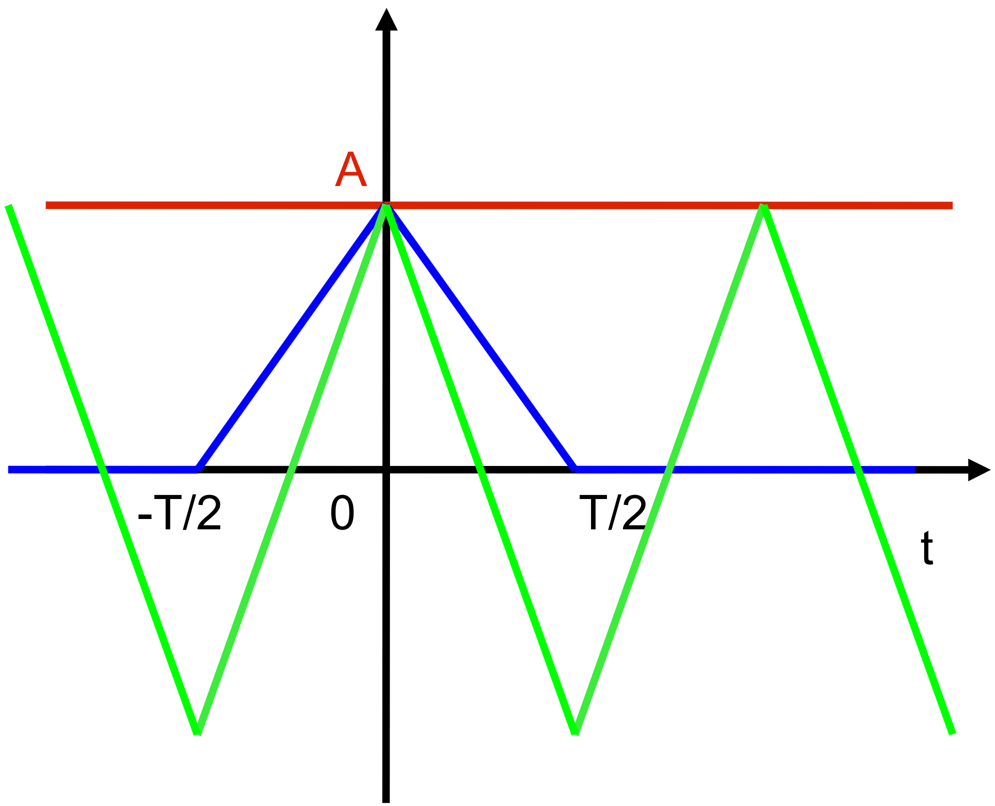
$$x_{eff} = x_{rms} = \sqrt{P_x} = \sqrt{\lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} x(t)^2 \, dt}$$

Exemples:

$$\boxed{x(t) = A}$$

$$\boxed{x(t) = A \quad \Lambda\left(\frac{2t}{T}\right)}$$

$$\boxed{x(t) = A \quad triangle(t)}$$



Commentaires ?

Récapitulatif des trois signaux :

Le Signal	valeur moyenne	énergie totale	puissance moyenne Totale	valeur efficace
définition				
$x(t) = A$				
$x(t) = A\ \Lambda(2t/T)$				
$x(t) = A$ triangle (t)				

Conclusions :

Il y a des signaux :

- Soit à énergie finie
- Soit à puissance moyenne finie

Le cas particulier des signaux périodiques

Par définition un signal périodique de période T est tel que :

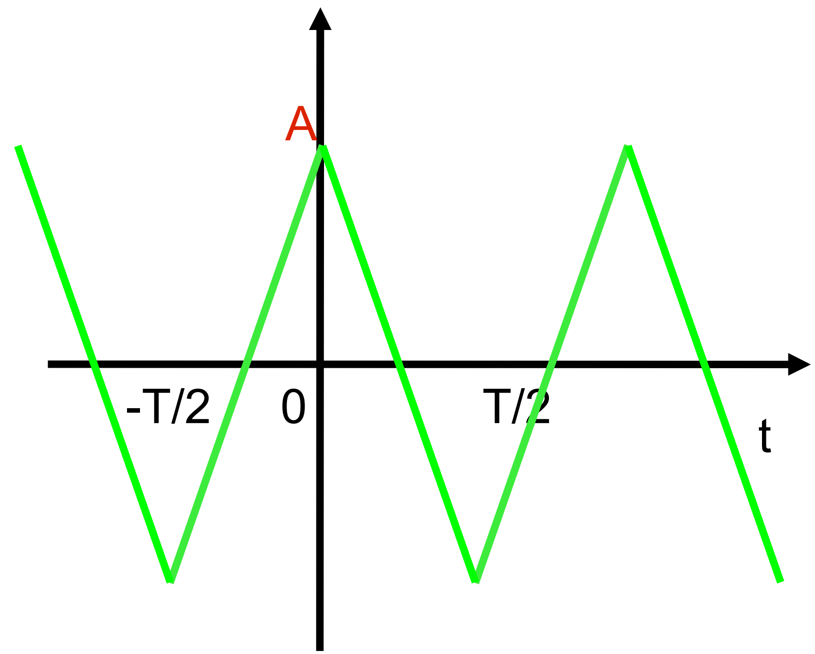
$$\forall\, t, x(t+T) = x(t)$$

Dans ce cas les formules deviennent :

$$\boxed{x(t) = A \quad triangle(t)}$$

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, dt$$

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)^2\, dt = \overline{x(t)^2}$$



Propriétés des signaux physiques

- Un signal temporel expérimental est nécessairement

physiquement réaliste

- Il est donc soumis à différentes contraintes :
  - son énergie est bornée ;
  - sa valeur instantanée est bornée ;
  - sa valeur instantanée est une fonction continue du temps (à cause de l'inertie de tout système physique) .

Fonctions mathématiques simples utilisées pour décrire des signaux

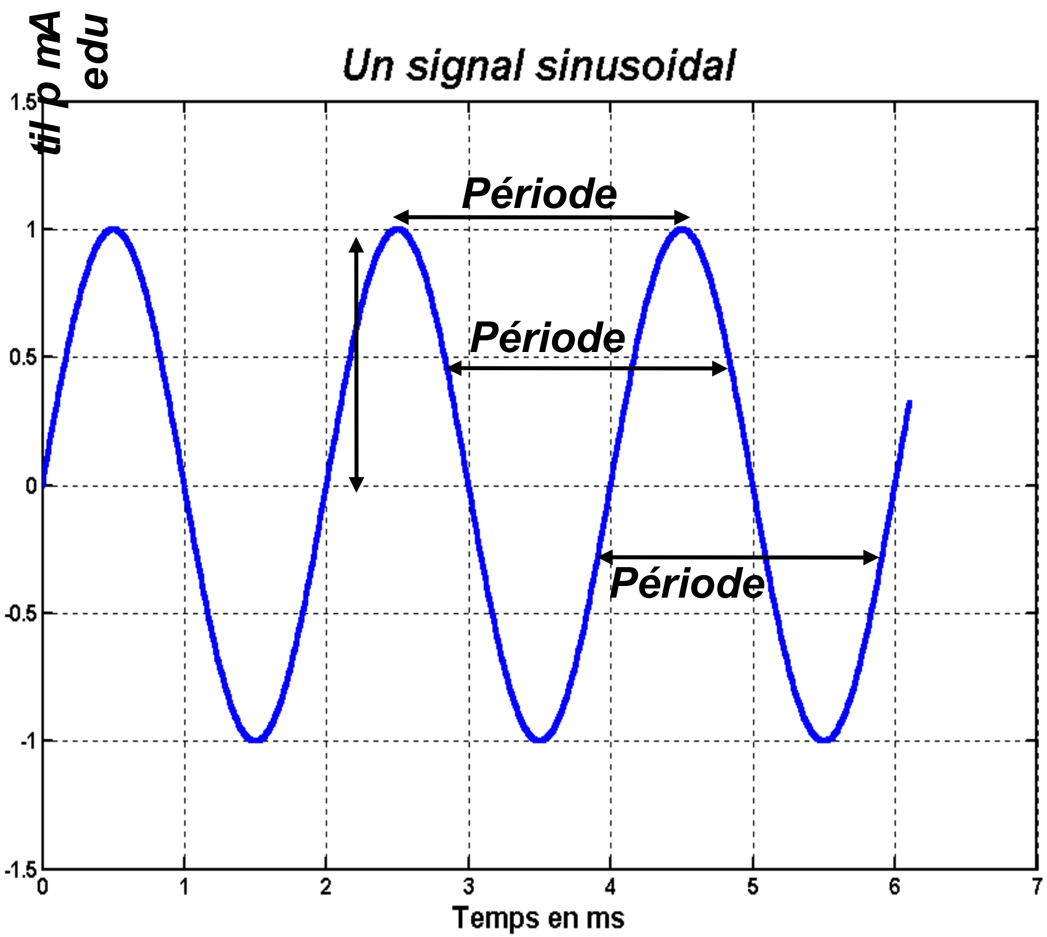
- constante (décrit par un paramètre) $x(t)=A$
- droite (décrit par 2 paramètres) $x(t)=At+B$
  - mais tend vers l'infini
- sinus (décrit par trois paramètres) $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$
- ....

La constante, le sinus, etc. : signaux bornés mais à énergie infinie

- pas physiquement réaliste
- mais intéressant pour modéliser les signaux réels

1. Introduction et définitions
2. Une première modélisation
3. **Le signal sinusoïdal**
4. Analyse fréquentielle ou
   Analyse de Fourier
5. Un exemple d'utilisation Le DTMF
6. Notion de spectre

La sinusoïde



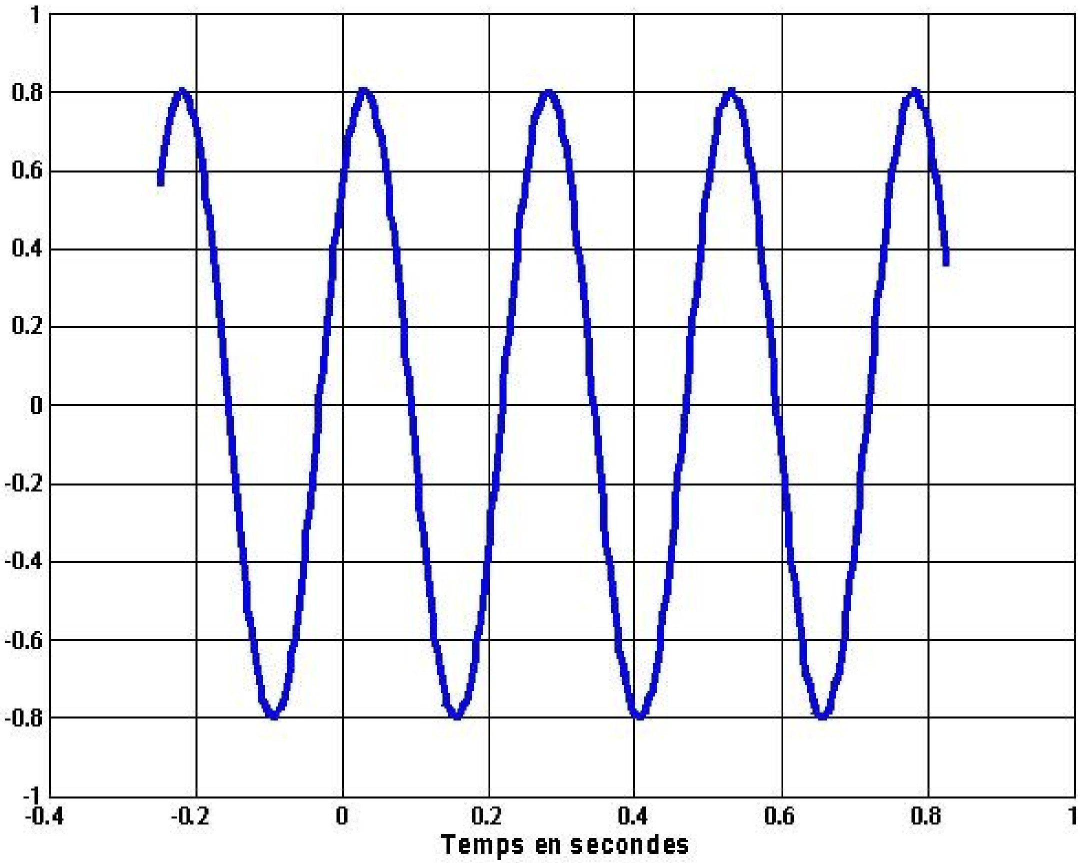
$y(t) = A.\sin(\,2.\pi.t\,/T_0 + \varphi\,)$

- A = amplitude (ici, 1)
- T_0= période (ici, 2 ms) ;

$Y(t+nT_0) = Y(t)$

- F_0= fréquence (ici, 500 Hz)
- ω_0 = pulsation = $2.\pi.F_0$ (ici, 3141,6 rd/s)
- $\varphi \rightarrow$ déphasage (0 rd)

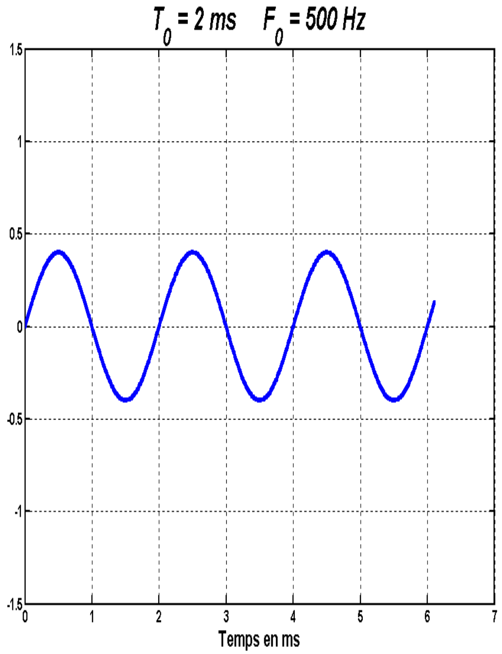
Paramètres d'une sinusoïde

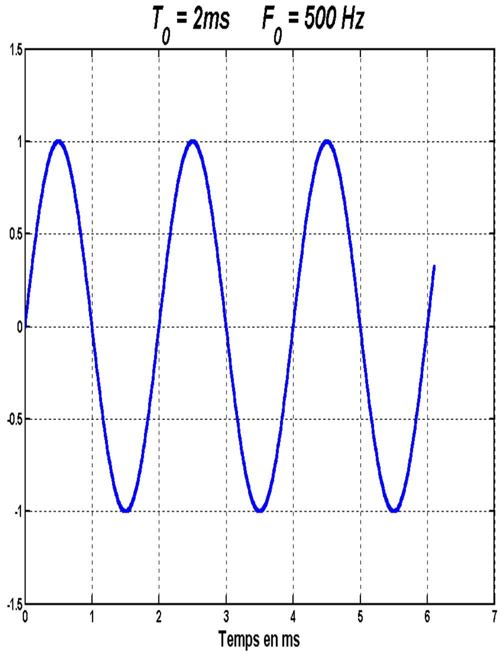


- Amplitude ?
- Période ?
- Fréquence ?
- Pulsation ?
- Déphasage ?

L'amplitude

- Elle est caractéristique de la puissance du signal.
- Quelle est la puissance moyenne totale d'un signal sinusoïdal ?
- Quelle est la valeur efficace de ce signal ?

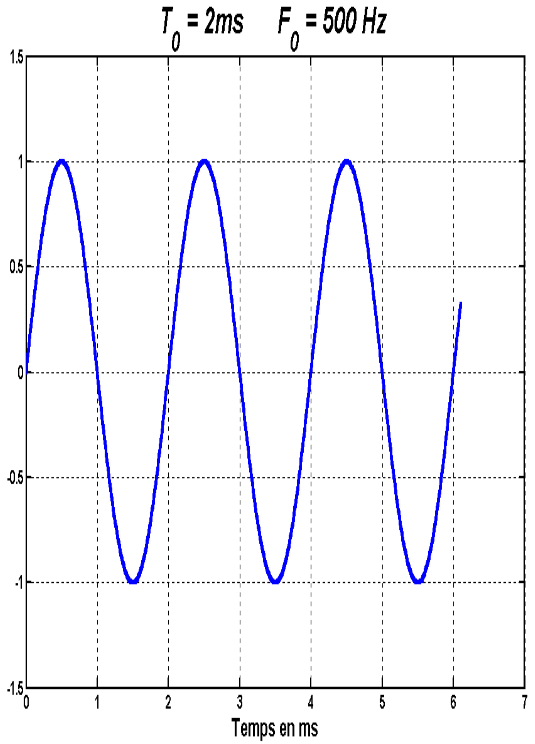


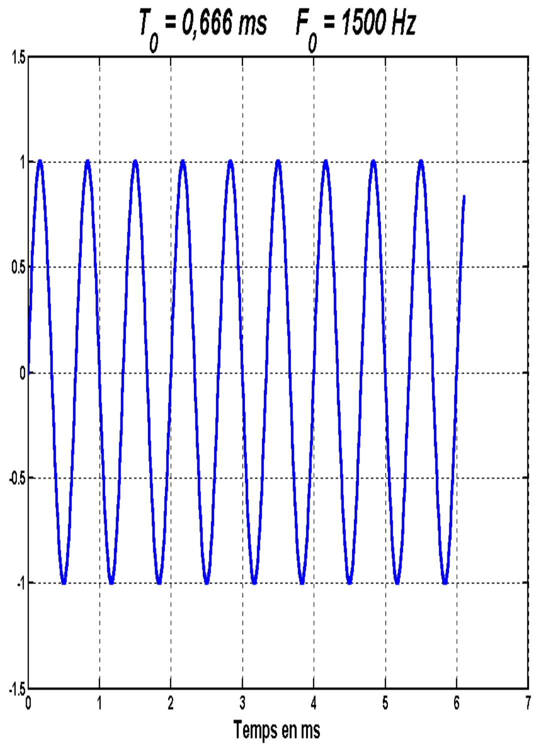


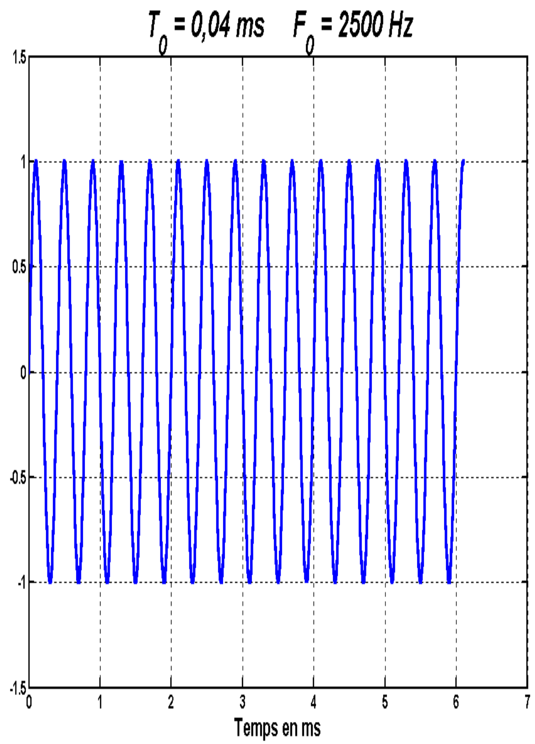
puissance moyenne : ......

puissance moyenne : ....

La fréquence







basse fréquence ***haute fréquence***

période longue ***période courte***

1. Introduction et définitions
2. Une première modélisation
3. Le signal sinusoïdal
4. **Analyse fréquentielle ou Analyse de Fourier**
5. Un exemple d'utilisation Le DTMF
6. Notion de spectre

Principe de base

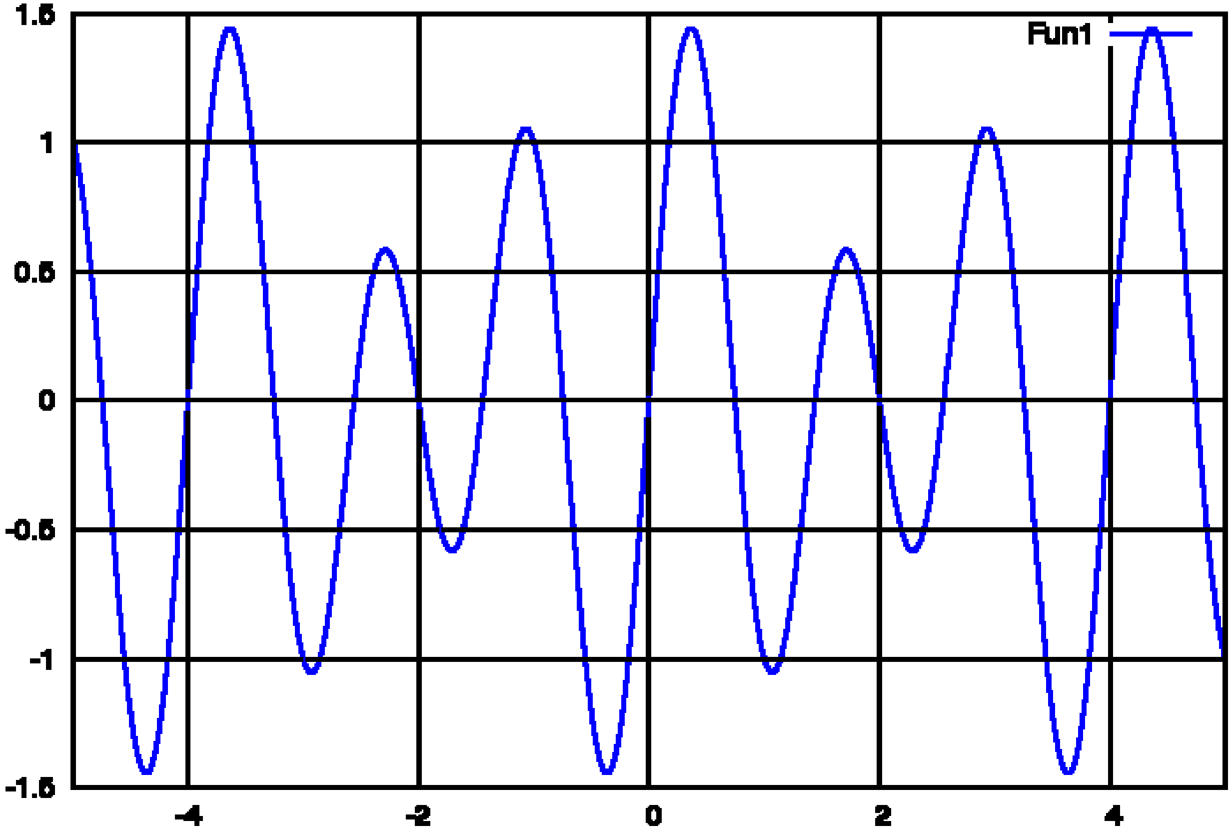
- Un grand nombre de signaux peuvent être décris comme la superposition de plusieurs signaux élémentaires de type sinusoïdal.
- Autrement dit, un signal est le résultat de l’addition de sinusoïdes d’amplitudes et de fréquences différentes.

- **COMPOSANTE :**
  - Chaque sinusoïde entrant dans la composition d'un signal est appelée composante du signal.
  - Un signal est décomposable en une somme de composantes sinusoïdales.

Des signaux à une seule composante

- Le son « pur » est un signal sinusoïdal faisant intervenir des fréquences comprises entre les sons graves (basses fréquences) de quelques dizaines de Hz jusqu'aux sons aigus de quelques kHz.
- La lumière : Une couleur correspond à une fréquence. Dans ce domaine, on utilise historiquement la longueur d'onde plutôt que la fréquence. Rouge λ=0,8 µm (cad 3,74 10^{14} Hz = 3,74 10^{5} GHz), bleu λ=0,4 µm (7,5 10^{14} Hz = 7,5 10^{5} GHz).
- La houle : λ= 1m à 10m.
- Le courant électrique alternatif : Appelé aussi « secteur », il a pour but de distribuer l'énergie sur un territoire en utilisant un courant sinusoïdal de fréquence 50 Hz en France).

Les signaux à deux composantes



$$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{2}t\right)+\sin\left(\frac{2\pi 4}{3}t\right)$$

Décomposition des signaux périodiques

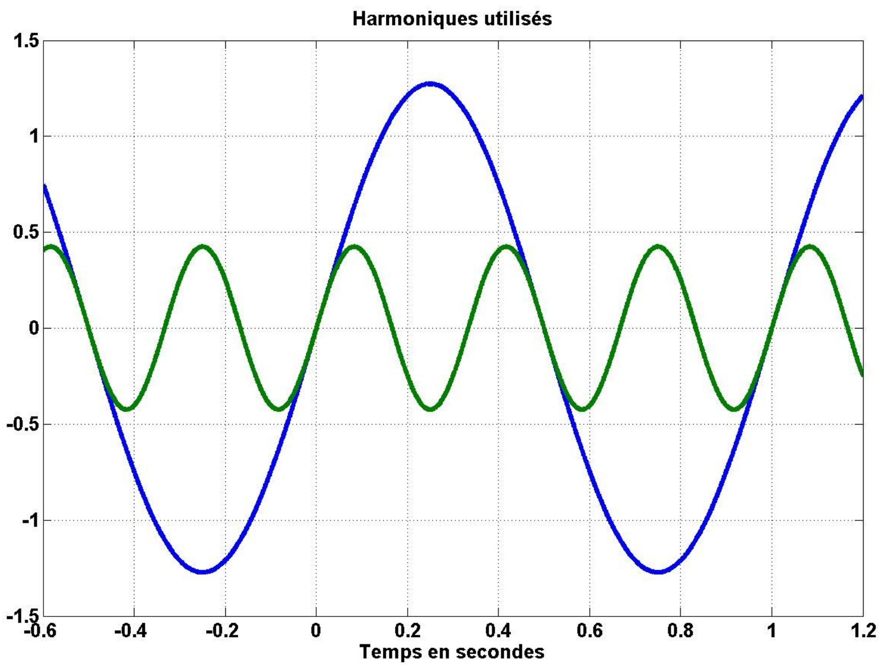
- **Tout** signal périodique de fréquence f_0 se décompose en composantes sinusoidales **dont leur fréquence est multiple de la fréquence f_0.**
- La composante à f_0 est appelée le fondamental.
- La composante à n f_0 est appelée l'harmonique de rang n.

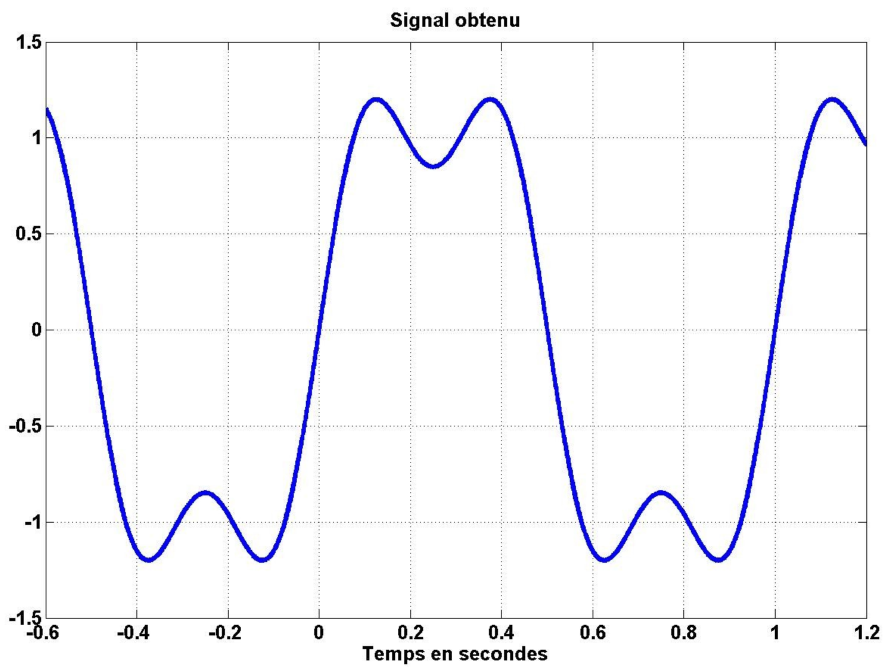
- **Exemple du signal carré :**

$$carre(t) = 0{,}637\cos(2\pi f_0 t) + 0{,}212\cos(2\pi 3 f_0 t) + 0{,}127\cos(2\pi 5 f_0 t) + \ldots$$

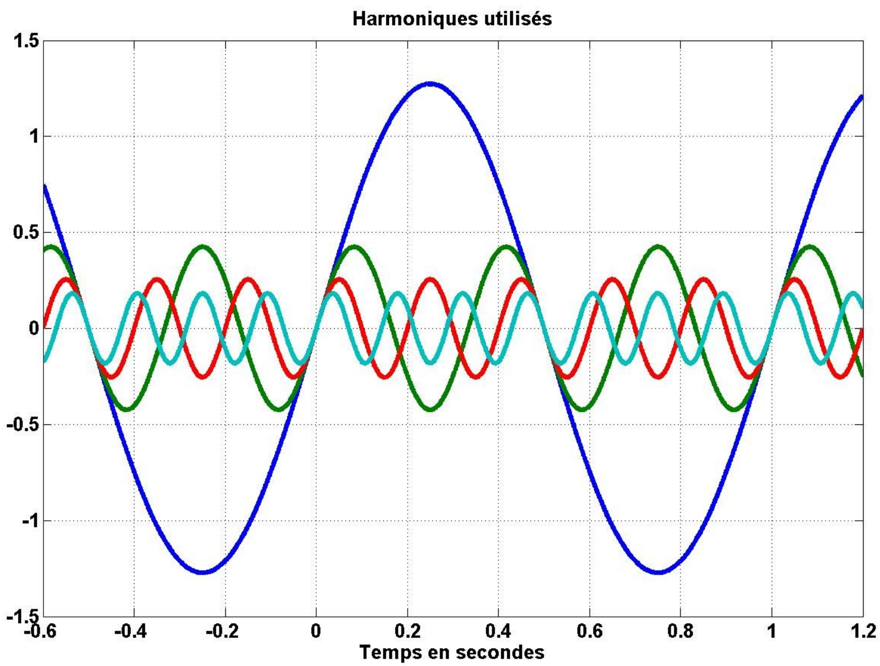
$$carre(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi}\cos(2\pi(2n+1) f_0 t)$$

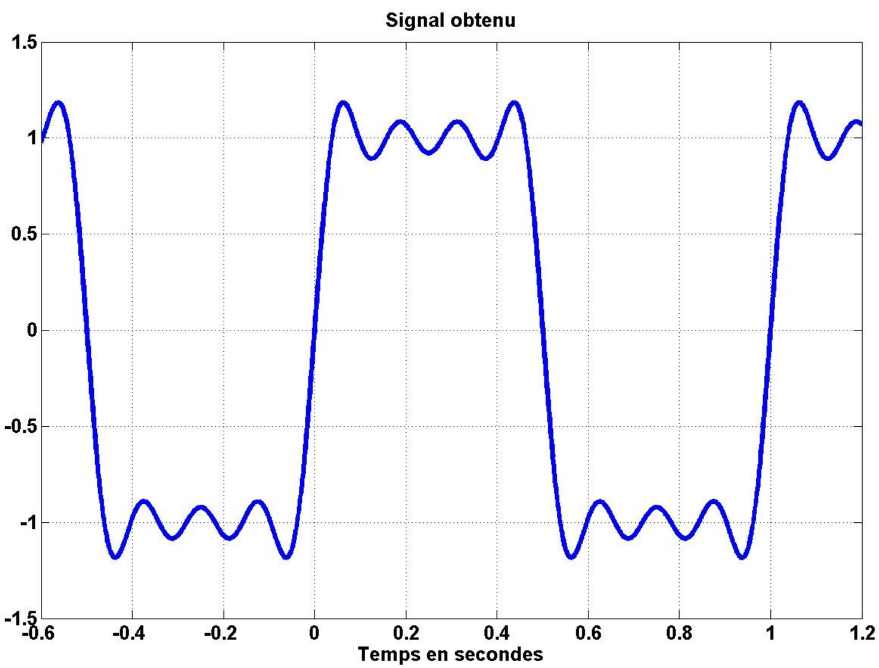
Décomposition d'un signal carré (2 harmoniques)



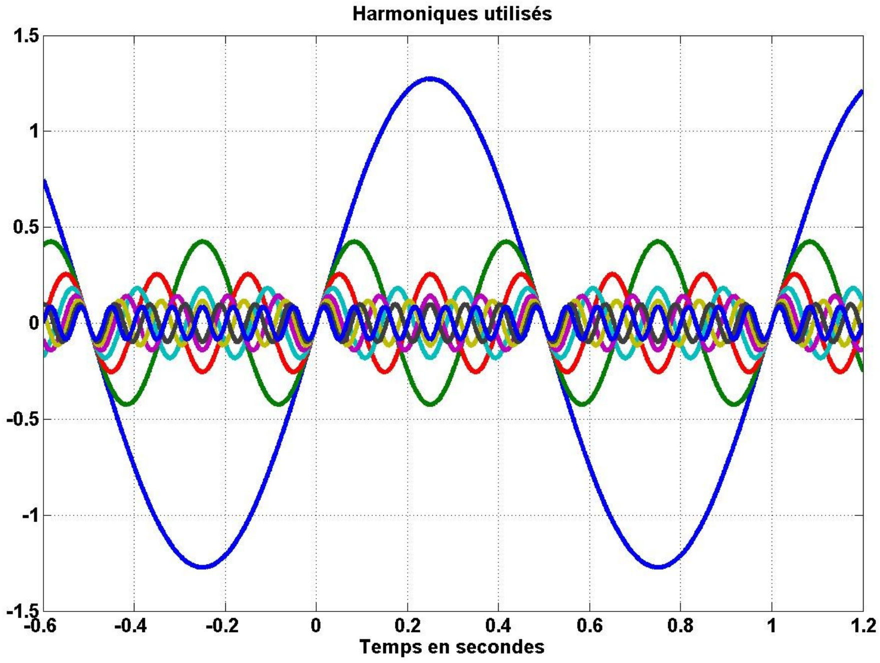


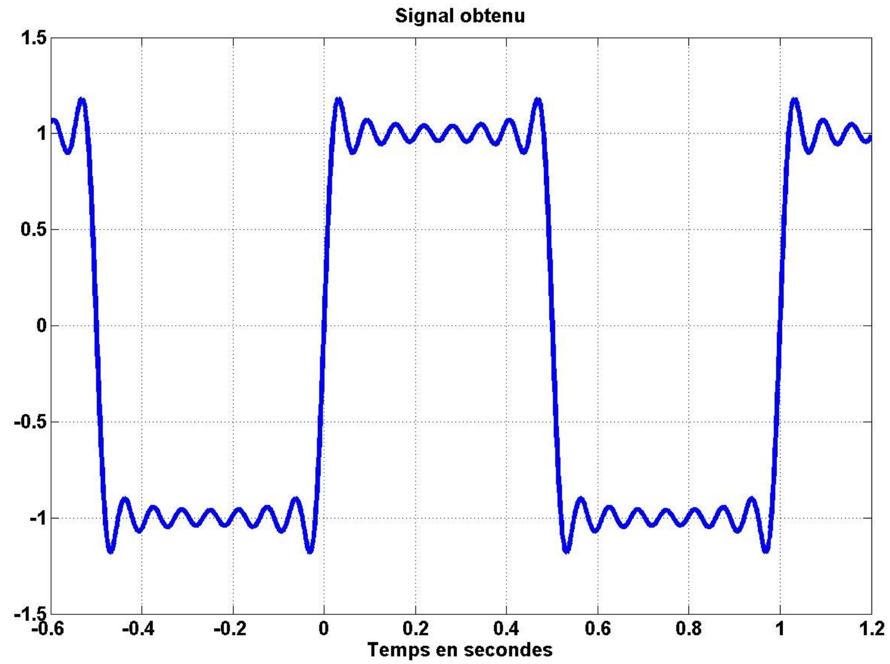
Décomposition d'un signal carré (4 harmoniques)



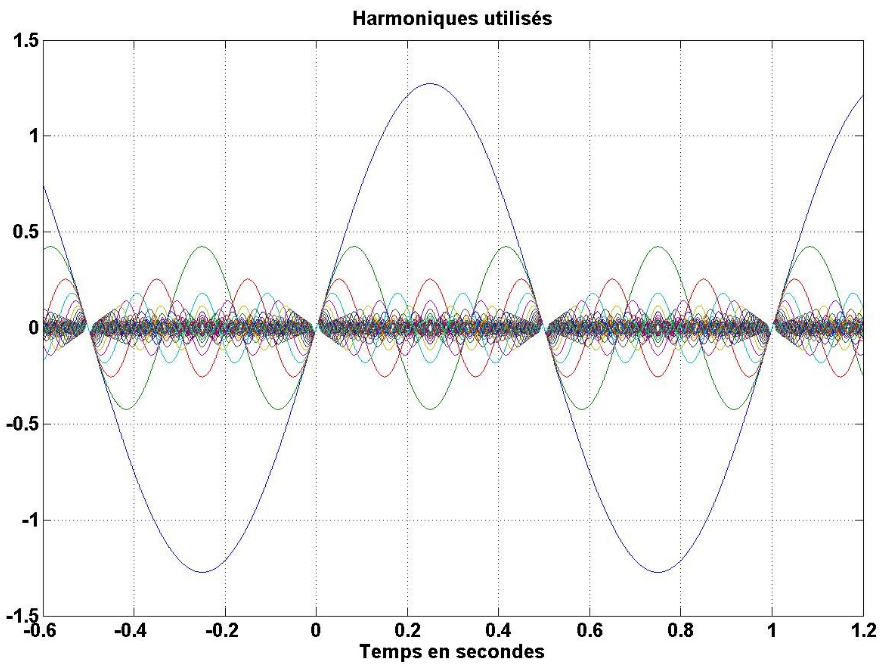


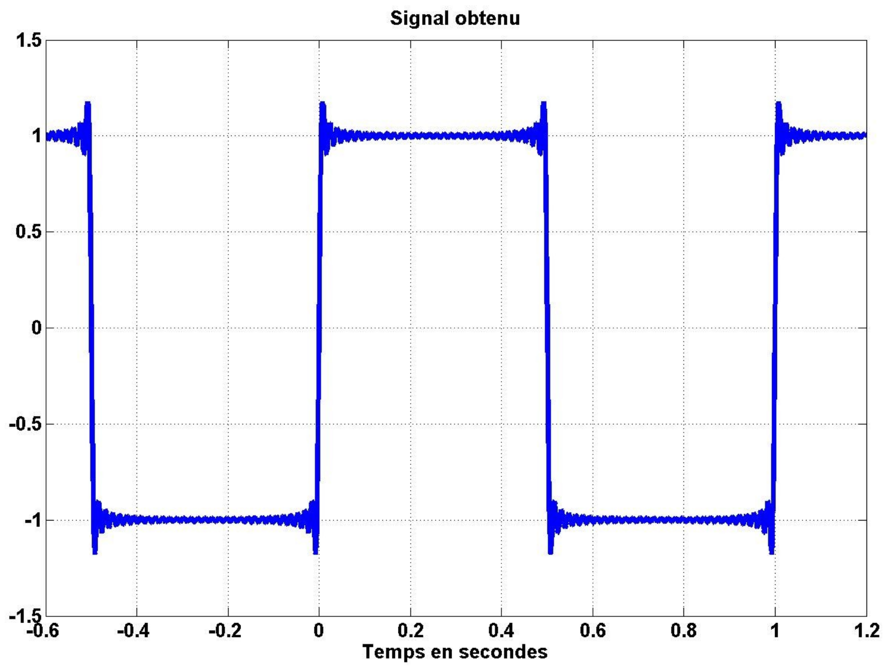
Décomposition d'un signal carré (8 harmoniques)





Décomposition d'un signal carré (32 harmoniques)





Un peu d'histoire ... Joseph Fourier

- Joseph Fourier (21 mars 1768 à Auxerre - 16 mai 1830 à Paris) est un mathématicien et physicien français. Il postule la décomposition des signaux en somme de sinusoïdes pour résoudre l'équation de la chaleur.
- Il cherche la solution de :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

- Des mathématiques sympathiques ... ici, on évite de résoudre directement une équation différentielle !

1. Introduction et définitions
2. Une première modélisation
3. Le signal sinusoïdal
4. Analyse fréquentielle ou Analyse de Fourier
5. **Un exemple d'utilisation Le DTMF**
6. Notion de spectre

DTMF : principe

- C'est le principe utilisé dans le DTMF (dual-tone multi-frequency), nom générique pour les téléphones à clavier (postes fixes et sans fil) remplaçant les vieux téléphones à cadrans. Il y a deux groupes de fréquences :
  - Un groupe basse fréquences (<1 kHz) :

697 Hz 770 Hz 852 Hz 941 Hz.

  - Un groupe hautes fréquences (>1 kHz) :

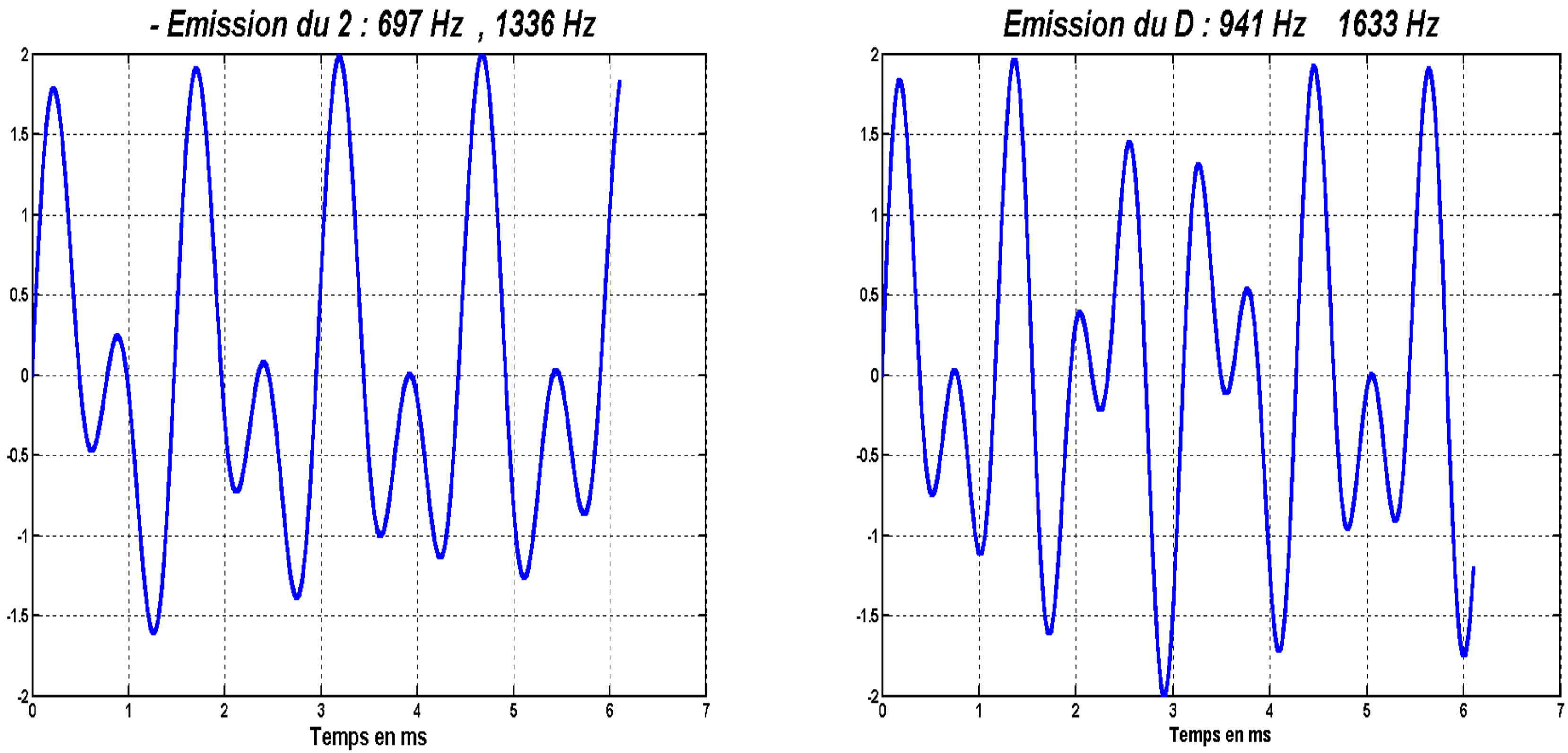
1209 Hz 1336 Hz 1477 Hz 1633 Hz.

- L'appui sur une touche additionne deux signaux élémentaires (non harmoniques) selon le tableau suivant.

DTMF : tableau des fréquences

	1209 Hz	*1336 Hz*	*1477 Hz*	*1633 Hz*
697 Hz	1	2	3	A
770 Hz	4	5	6	B
852 Hz	7	8	9	C
941 Hz	*	0	#	D

DTMF : exemples de signaux

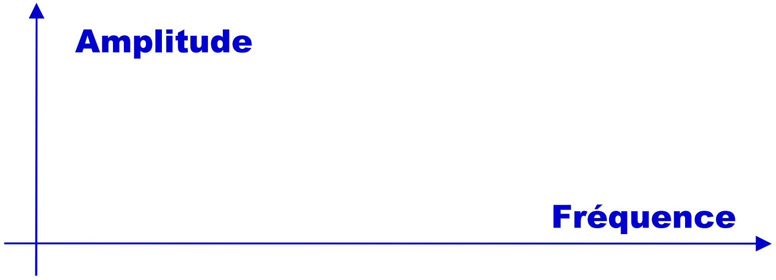


1. Introduction et définitions
2. Une première modélisation
3. Le signal sinusoïdal
4. Analyse fréquentielle ou Analyse de Fourier
5. Un exemple d'utilisation Le DTMF
6. **Notion de spectre**

Cas général

- Dans le cas général, un signal peut avoir plusieurs composantes fréquentielles et même une infinité.

- Pour caractériser un signal, nous pouvons représenter sur un graphique son spectre qui comprend :
  - en abscisse, les fréquences (ou les longueurs d'ondes dans certaines applications)
  - en ordonnée, l'amplitude de la composante fréquentielle du signal



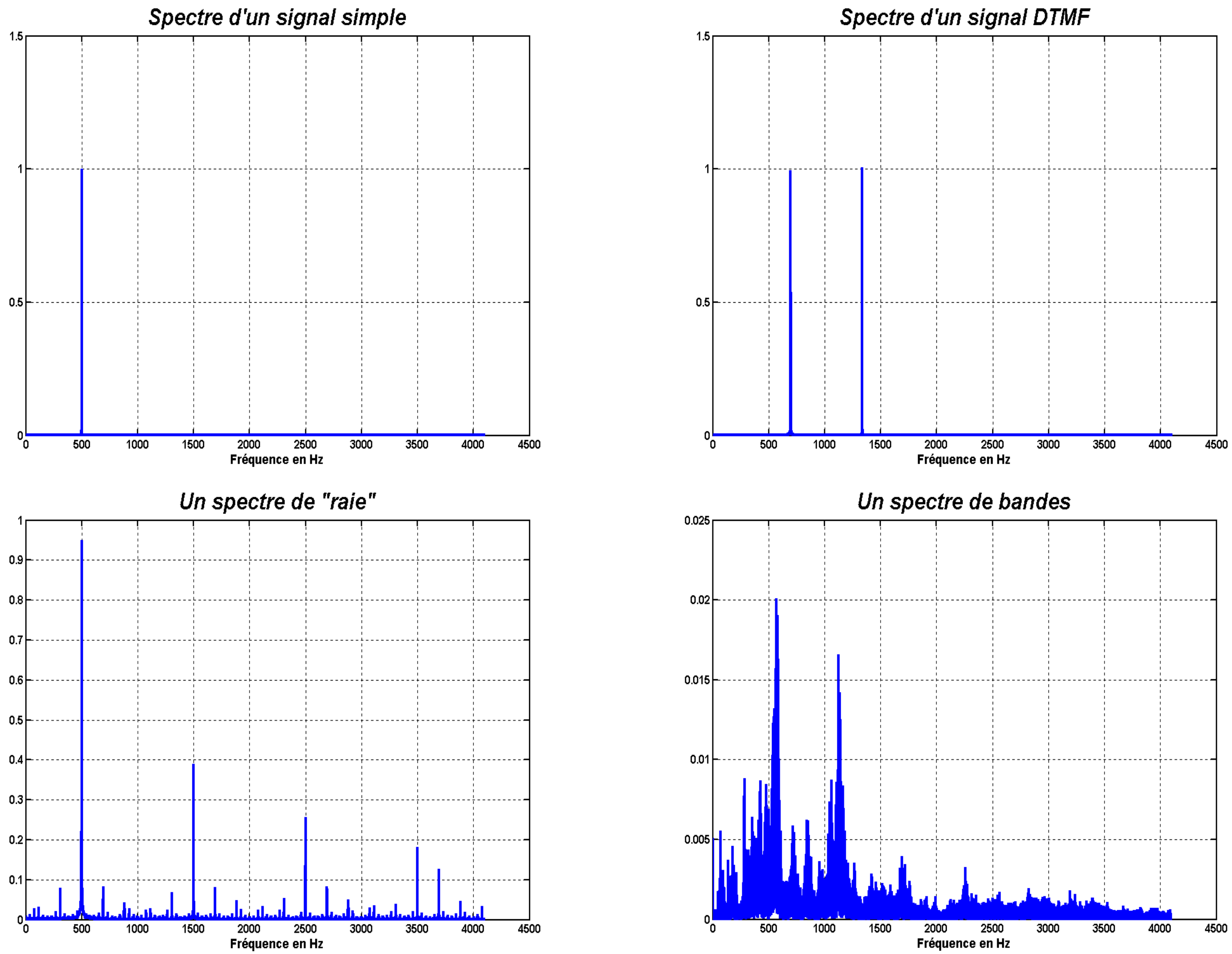
Des catégories de spectres

Il y a deux grandes catégories de spectres :

- Des spectres où les composantes sont très nettement séparées : ce sont des **spectres de raies** caractéristiques des signaux périodiques.

- Des spectres où les raies sont infiniment voisines les unes des autres, ce qui donne des **bandes de fréquences** : c'est le cas le plus général de signaux non périodiques.

Exemple de spectres

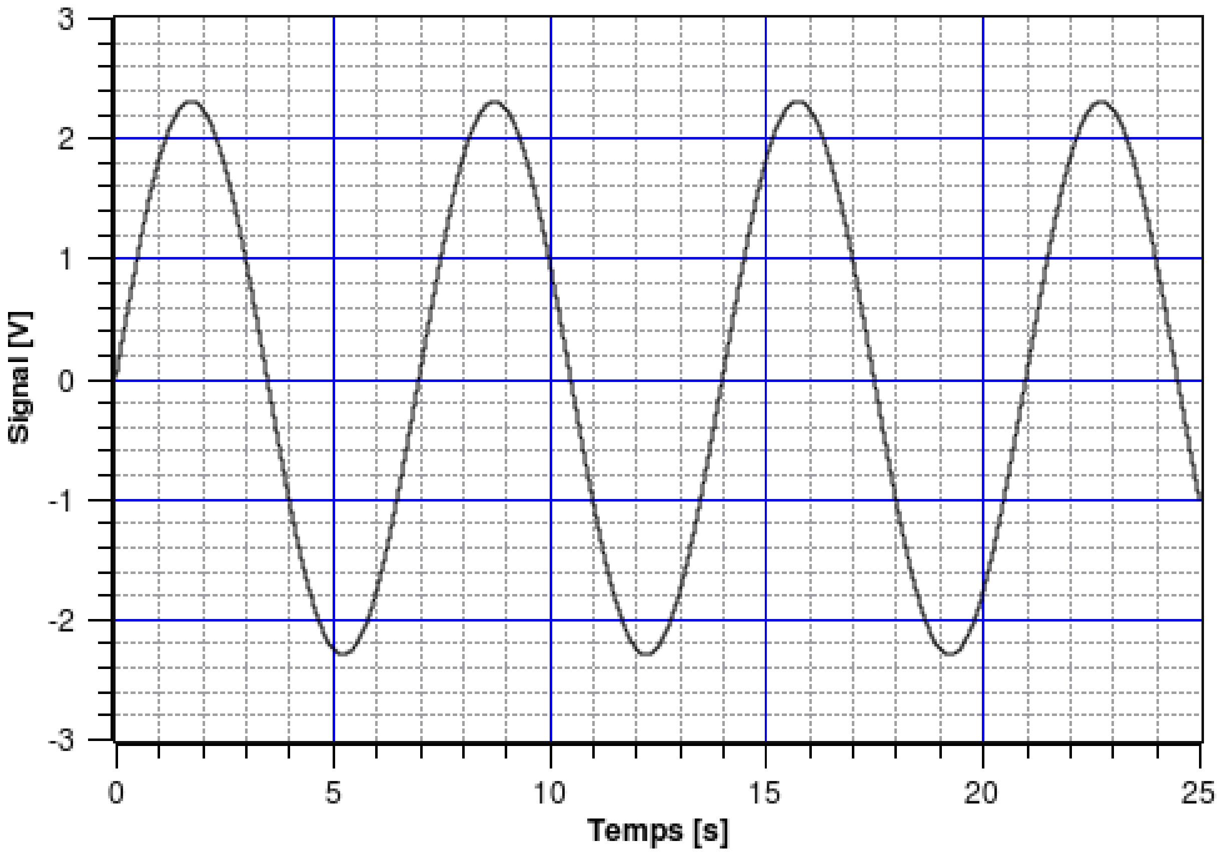


Le Signal : objet central de l'E.E.A.

Les exercices à préparer pour la semaine prochaine

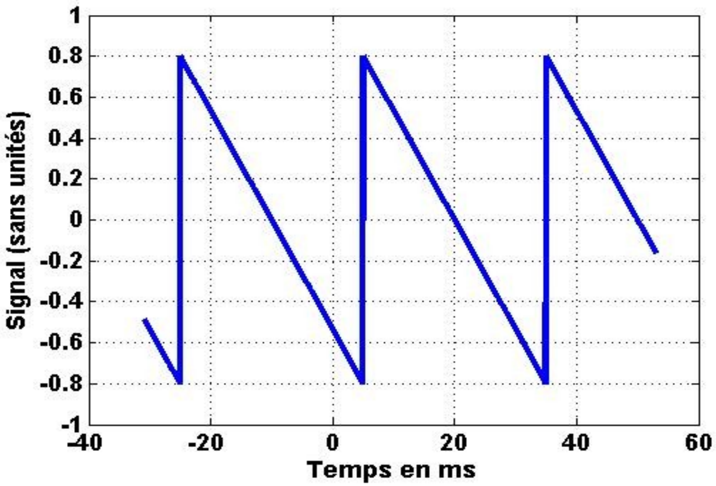
Exercice signal 1 :

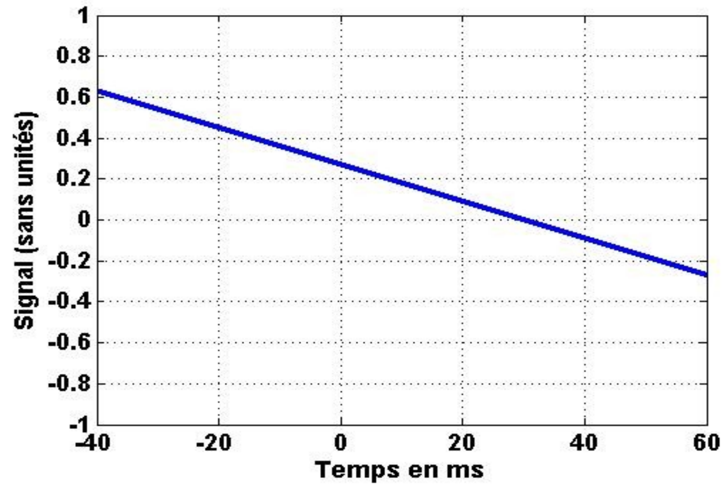
- Quelle est la période, la fréquence et l'amplitude sur signal représenté ci-dessous ?
- Quelle est sa puissance et sa valeur efficace ?

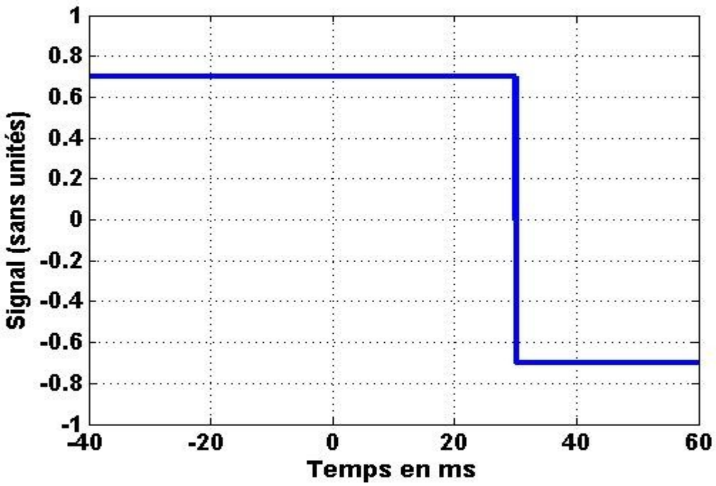


Exercice signal 2 :

• Calculer la puissance moyenne totale et la valeur efficace des signaux ci-dessous ?







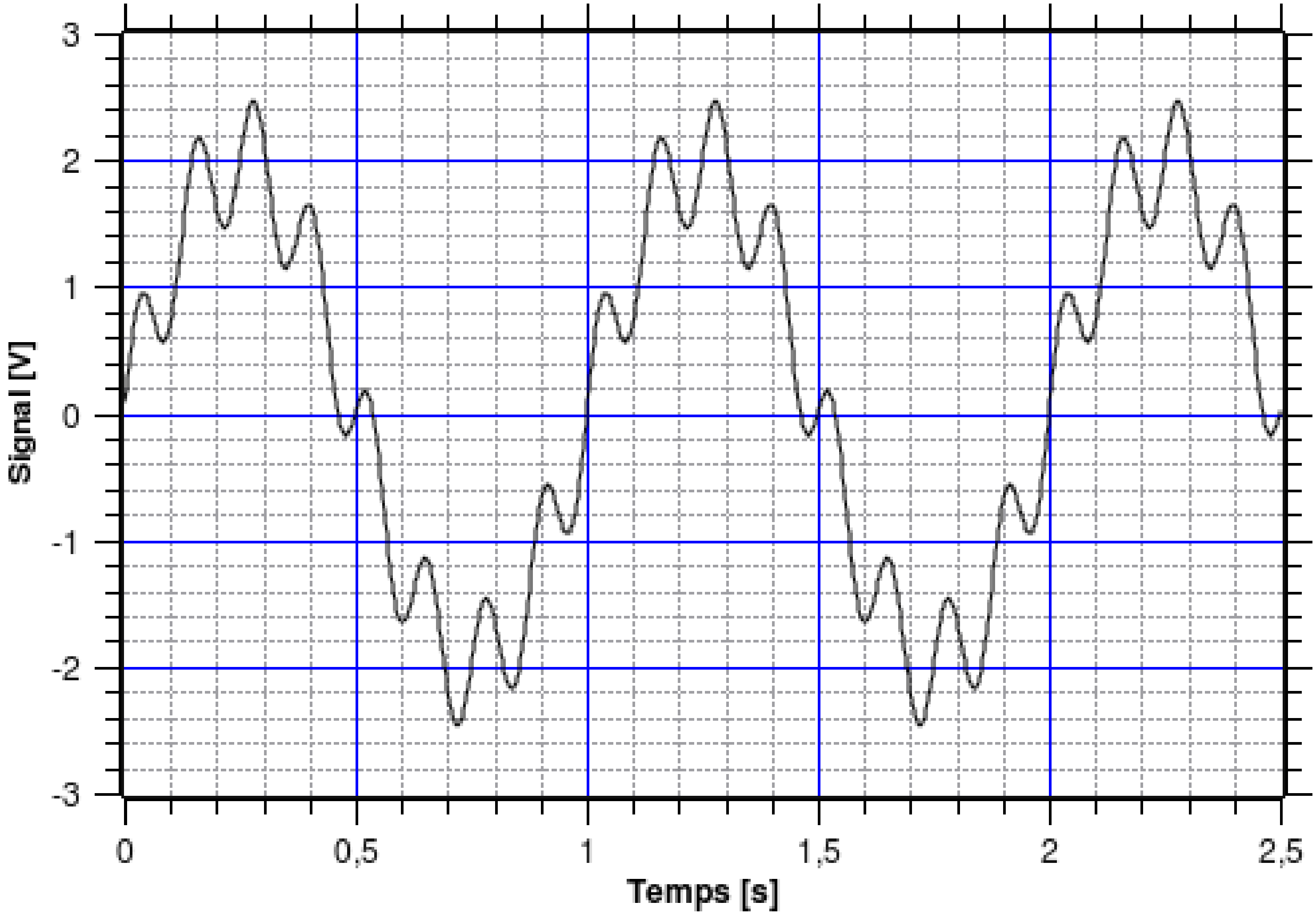
Exercice signal 3 :

- La somme de deux signaux sinusoïdaux d'amplitude non nulle peut-elle être sinusoïdale ?

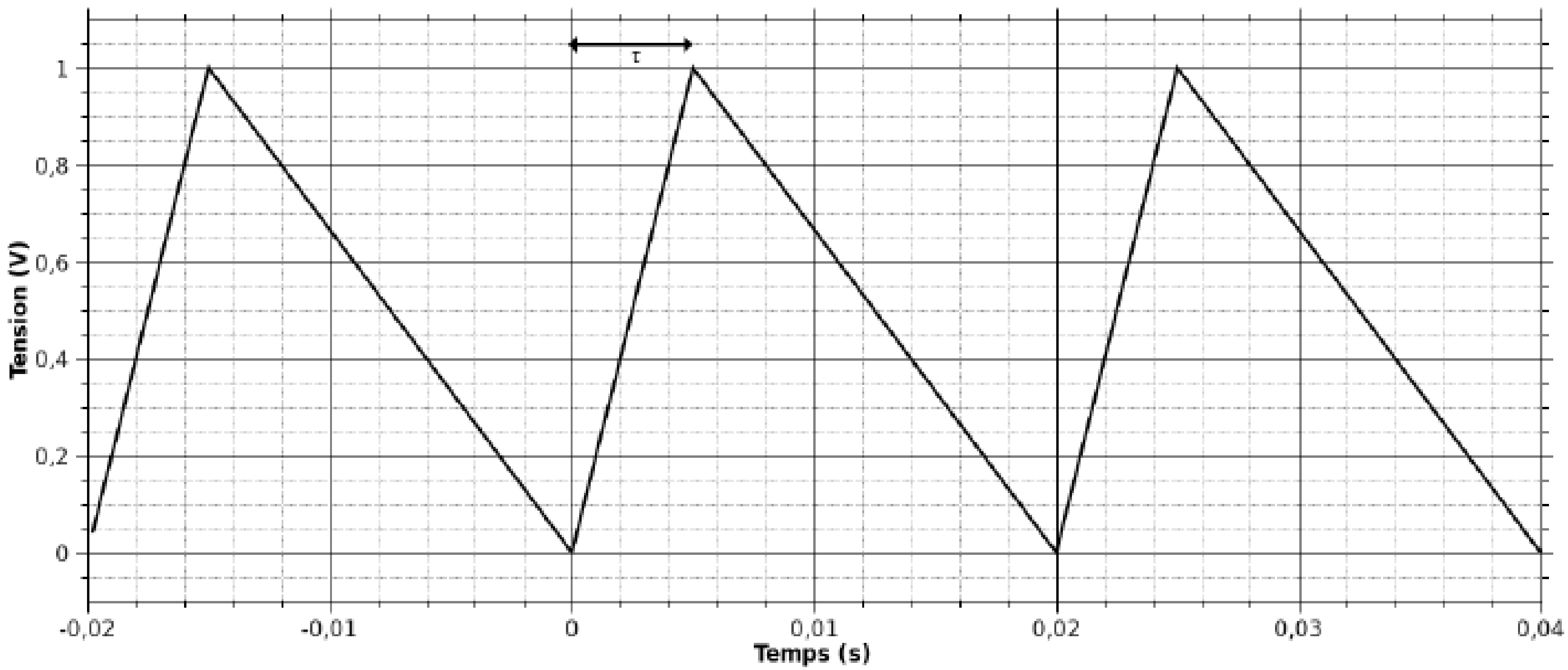
- La somme de deux signaux sinusoïdaux d'amplitude non nulle est-elle toujours périodique ?

Exercice signal 4 :

- Représenter l'allure du spectre du signal représenté ci-dessous ?



Un des exercices posé l'an passé



Le graphique ci-dessus représente le signal étudié. Il est uniquement constitué de portions de droite. Ici, $\tau = 0{,}005$ s.

Sur le graphique ci-dessus, déterminez graphiquement :

C.1-la valeur de la période, T,

C.2-la valeur moyenne,

C.3-les équations des droites définissant le signal sur une période.

C.4- En vous aidant de la question C.3, déterminez la valeur efficace.

Déterminez analytiquement en fonction du rapport τ/T :

C.5-la valeur moyenne du signal,

C.6-sa valeur efficace.