

Culture Scientifique de Base en Sciences pour l'ingénieur

Le Signal :

De l'analogique au numérique

1. **Signal analogique – Signal numérique**
2. Claude Elwood SHANNON
3. Échantillonnage
4. Numérisation

Une mesure a une unité.

Pour la manipuler nous utilisons un nombre.

Ce nombre peut être conservé ou stocké sous diverses formes :

- Analogique : nombre réel écrit sur un papier, profondeur d'un sillon de disque,....
- Numérique : utilisation de l'informatique industrielle, cela nécessite une conversion.

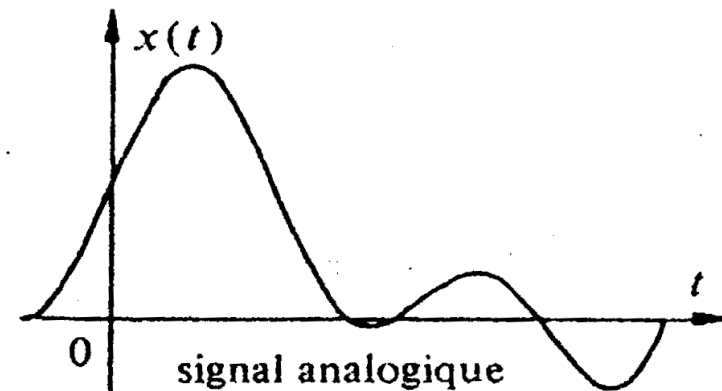
- Évolution de l'informatique, le coût réduit de son traitement
⇒ vers un traitement numérique des données
- Un exemple : le passage du disque vinyle au CD
 - Dans le disque vinyle, sauvegarde mécanique du son
⇒ traduit directement en mouvement du haut-parleur
 - Dans le CD, sauvegarde numérique du son
⇒ traitement adapté pour donner naissance au son
- Les systèmes analogiques sont difficiles à réaliser, à mettre à jour et sensibles aux perturbations.



- Un signal analogique est un signal à temps et amplitude continus dont la mesure à tout instant t est un nombre réel.

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R}$$

- Le monde réel est analogique (la température, la vitesse des voitures, ...)
- Ce signal est le point de départ et d'arrivée de tout traitement ; issu d'un capteur, il est traité puis réceptionné



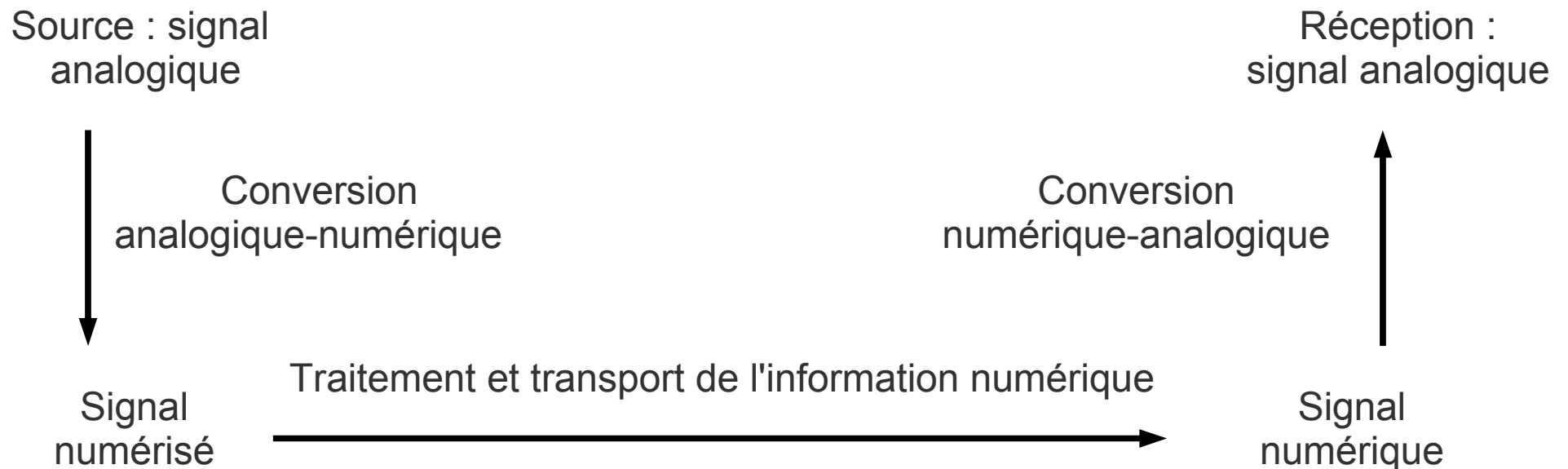
Source : signal
analogique

Traitement analogique : électronique



Réception :
signal analogique

- Les signaux de départ et d'arrivée sont analogiques
- Il y a conversion des signaux pour leur traitement
- L'outil de traitement devient l'informatique industrielle



Remarque : à l'émission comme à la réception, il y a toujours besoin d'analogique

La numérisation est une opération qui se décompose en deux actions réalisées pratiquement par le même composant : le convertisseur analogique-numérique (CAN, ADC)

Les deux actions :

- Discrétisation
- Numérisation

Chacune des deux actions implique une théorie adaptée.

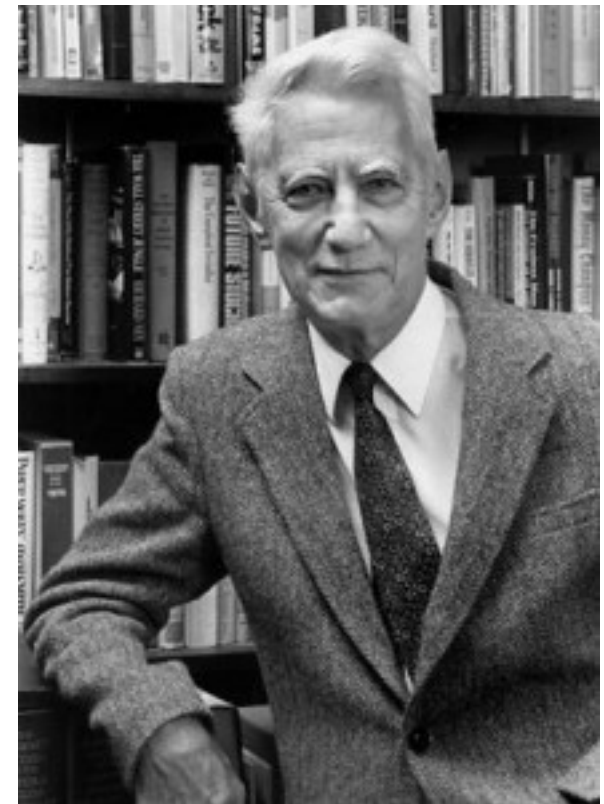
1. Signal analogique – Signal numérique
2. **Claude Elwood SHANNON**
3. Échantillonnage
4. Numérisation

Claude Shannon est né le 30 avril 1916 à Gaylord dans le Michigan. Mathématicien et physicien il entre au M.I.T et sa thèse est considérée comme peut-être la plus importante du siècle. Il entre aux laboratoires Bell qu'il quittera en 1972.

L'ouvrage fondateur est :

***Bell System Technical Journal : A mathematical theory
of communication
Vol 27 PP 379-423, 623-656, july-october 1948***

Il décède le 24 février 2001



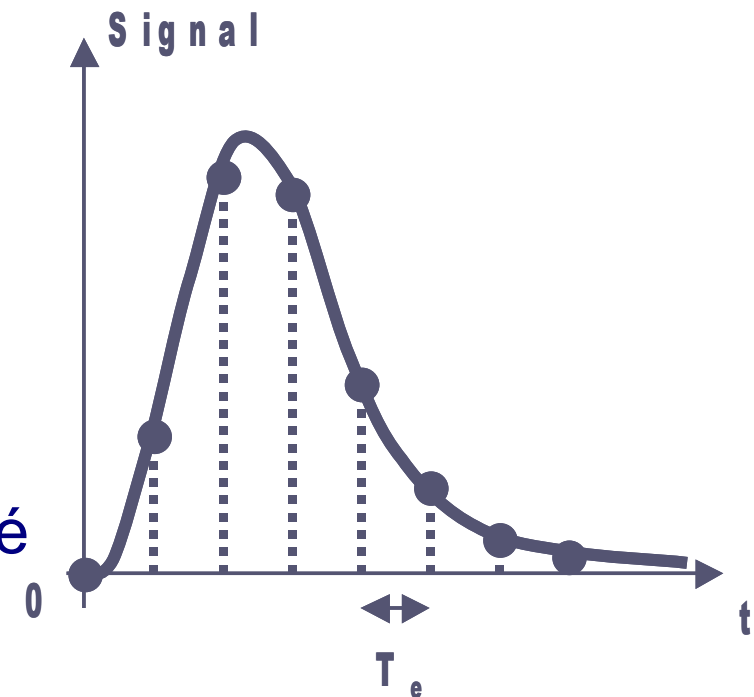
- En 1948 présentation de la théorie de l'information : une des grandes réalisations du 20ème siècle.
- La théorie de l'information a eu une grande influence sur les mathématiques pures.
- Formulation d'un modèle de système de communication remarquable par sa généralité et sa facilité à être traité mathématiquement.
- L'idée de base est que tout message se résume à une suite de 0 et de 1. On peut en effet numériser tout signal sans perte d'information à condition de respecter quelques règles élémentaires (Théorème de Shannon)
- La complexification des systèmes informatiques et de communication rend de plus en plus nécessaires les inévitables apports théoriques de Shannon.

1. Signal analogique – Signal numérique
2. Claude Elwood SHANNON
3. **Échantillonnage**
4. Numérisation

L'échantillonnage est une opération qui consiste à prélever à intervalles de temps réguliers des mesures sur un signal continu

Des définitions :

- ♦ L'intervalle de temps d'espacement des mesures est la période d'échantillonnage : T_e
- ♦ Les mesures prélevées sont les **échantillons** : à $t = kT_e \rightarrow x_k = x(t = kT_e)$
- ♦ Un signal échantillonné est caractérisé par l'ensemble de ses échantillons : $\{x_k\}$



Sur les trois vues suivantes échantillonner le signal aux périodes d'échantillonnage précisées :

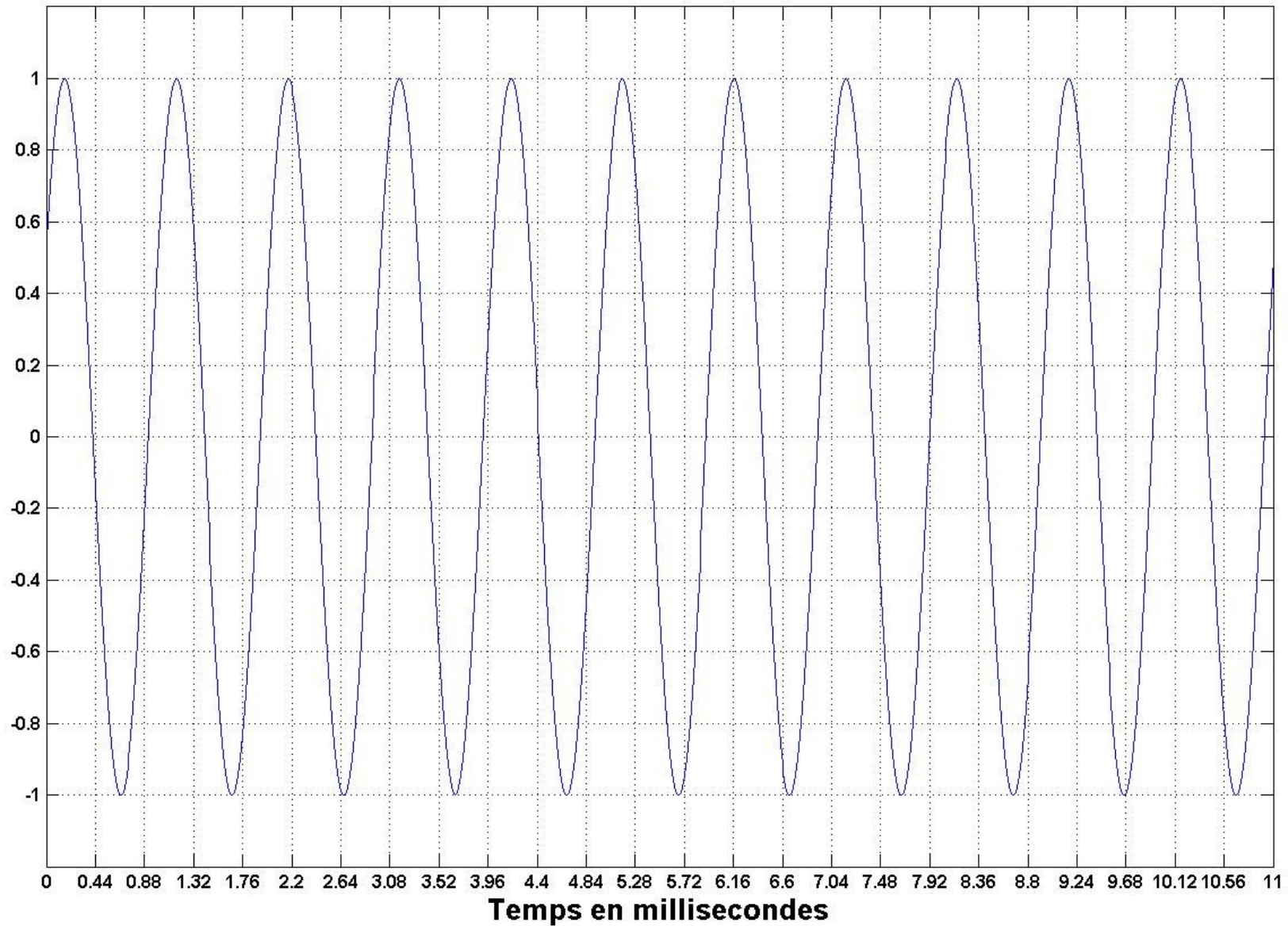
→ *0,22 ms*

→ *1 ms*

→ *1,1 ms*

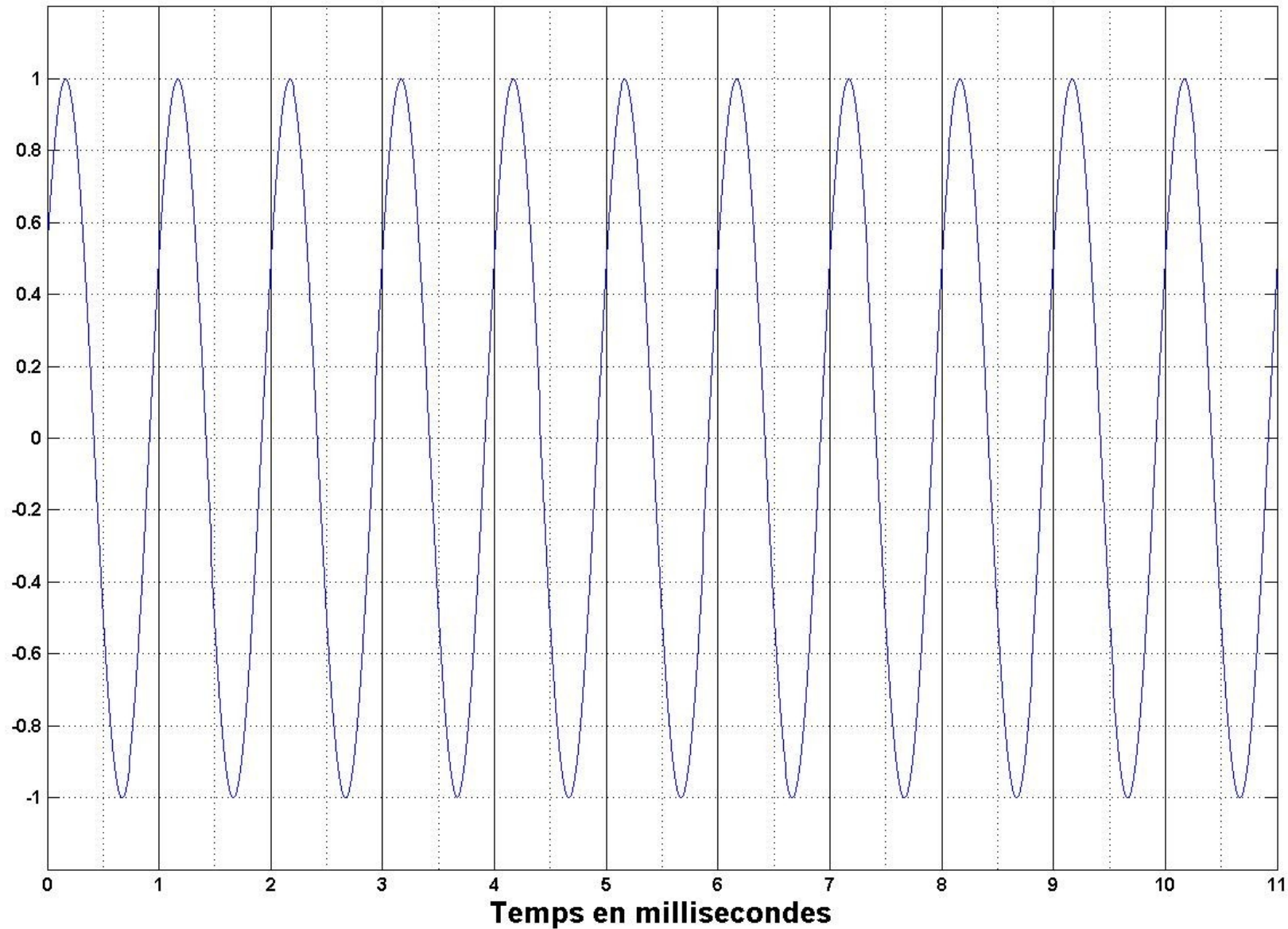


Période du signal 1ms - Période d'échantillonnage 0,22ms



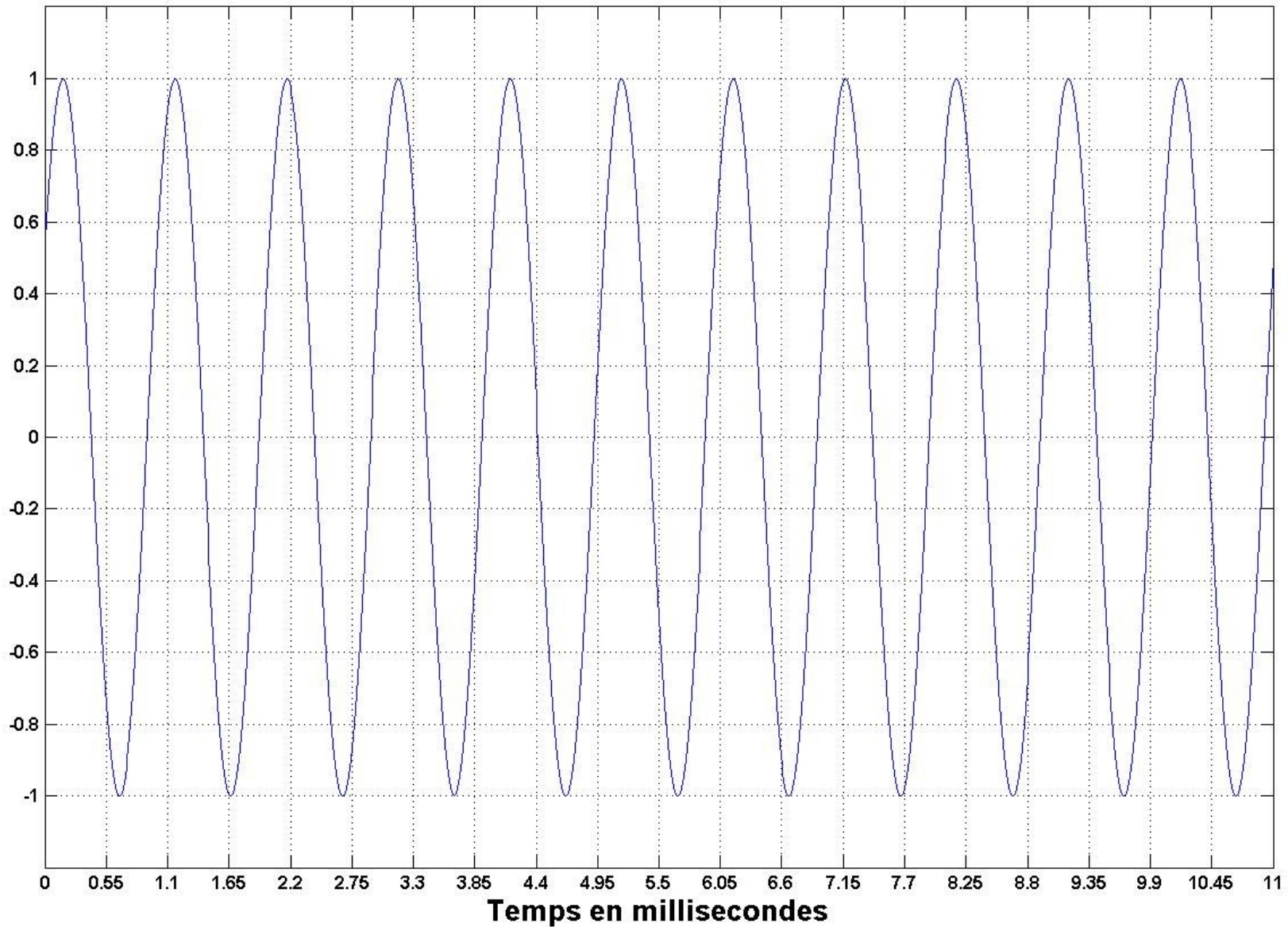
Un problème du à l'échantillonnage : exercice 2

Période du signal 1ms - Période d'échantillonnage 1ms



Un problème du à l'échantillonnage : exercice 3

Période du signal 1ms - Période d'échantillonnage 1,1ms



Nous ne pouvons pas échantillonner n'importe comment. Si la période d'échantillonnage est trop longue le signal sinusoïdal semble changer de fréquence, le signal est déformé, il perd son information

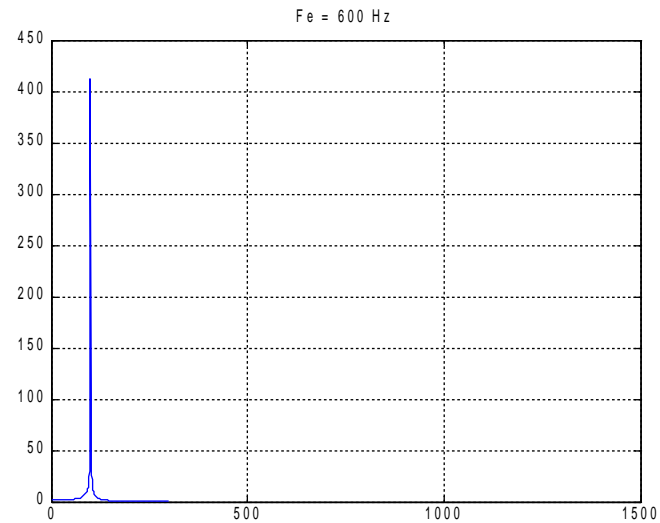
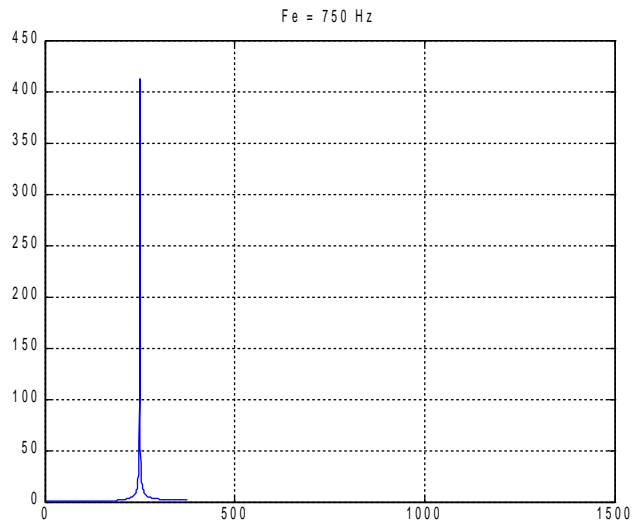
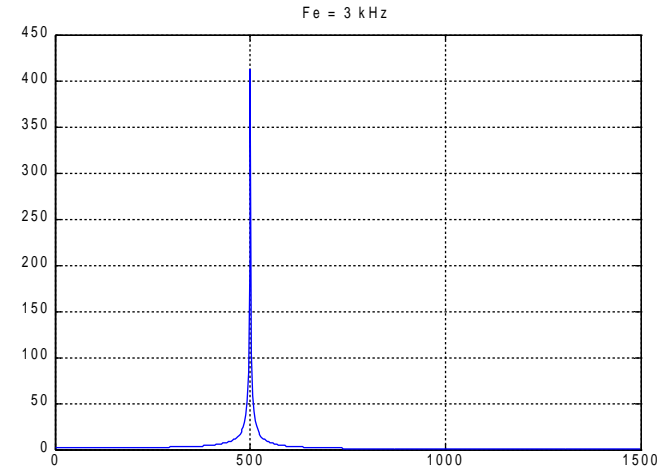
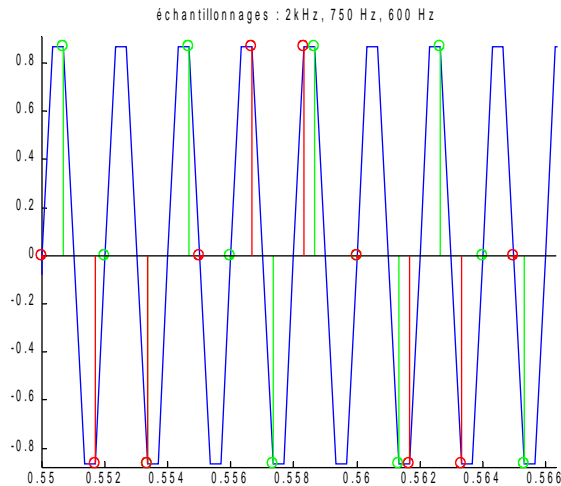
Théorème de Shannon

Si un signal continu possède un spectre de fréquence d'extension maximale f_{max} , il est possible de l'échantillonner sans perte d'information si la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ est choisie telle que :

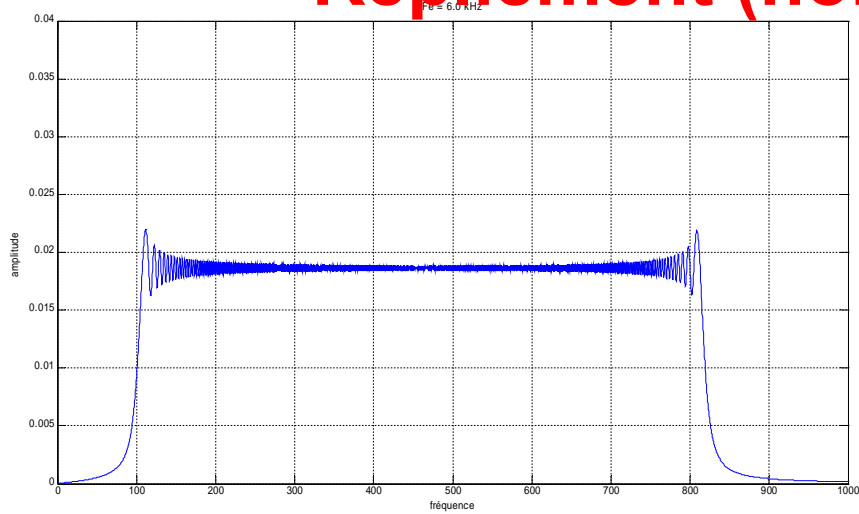
$$f_e > 2 f_{max} \Leftrightarrow T_e < \frac{1}{2 f_{max}}$$

Exercice : quelle est l'expression du théorème de Shannon pour une sinusoïde de fréquence f_0 ?

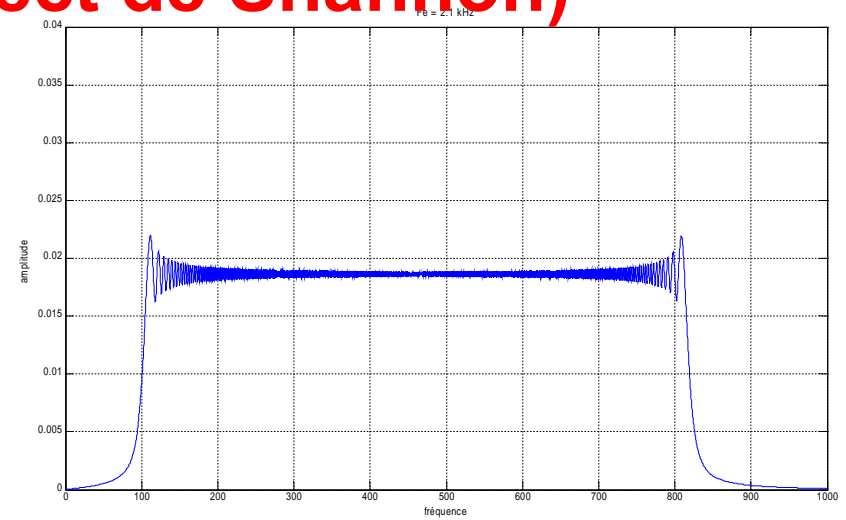
Sinus 500 Hz → Sous échantillonnage



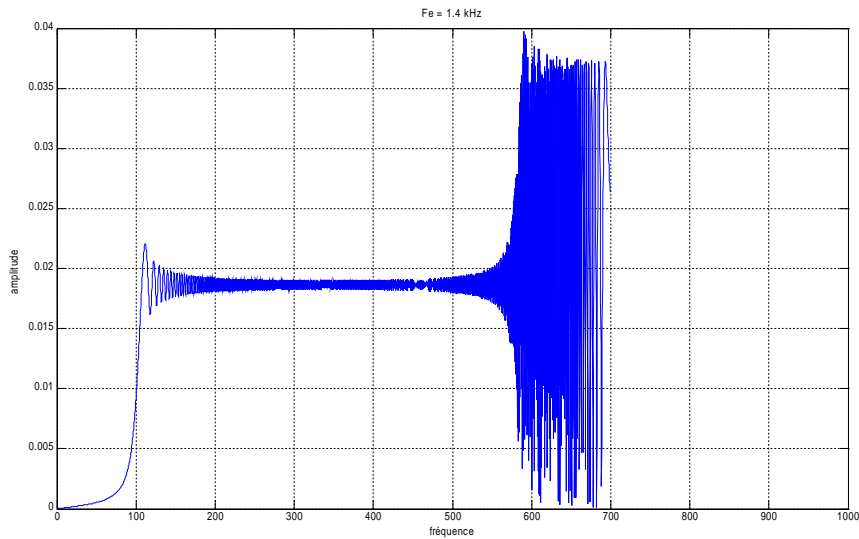
Repliement (non respect de Shannon)



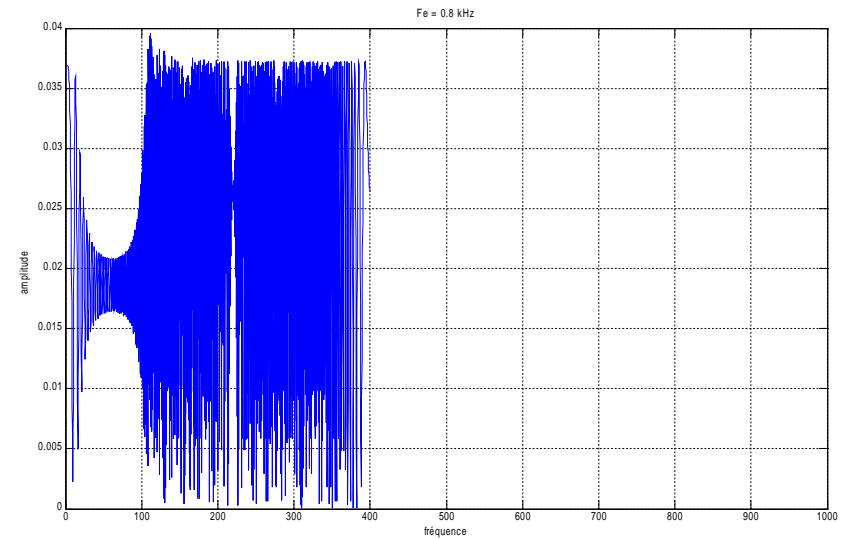
$$f_e = 6 \text{ kHz}$$



$$f_e = 2,1 \text{ kHz}$$

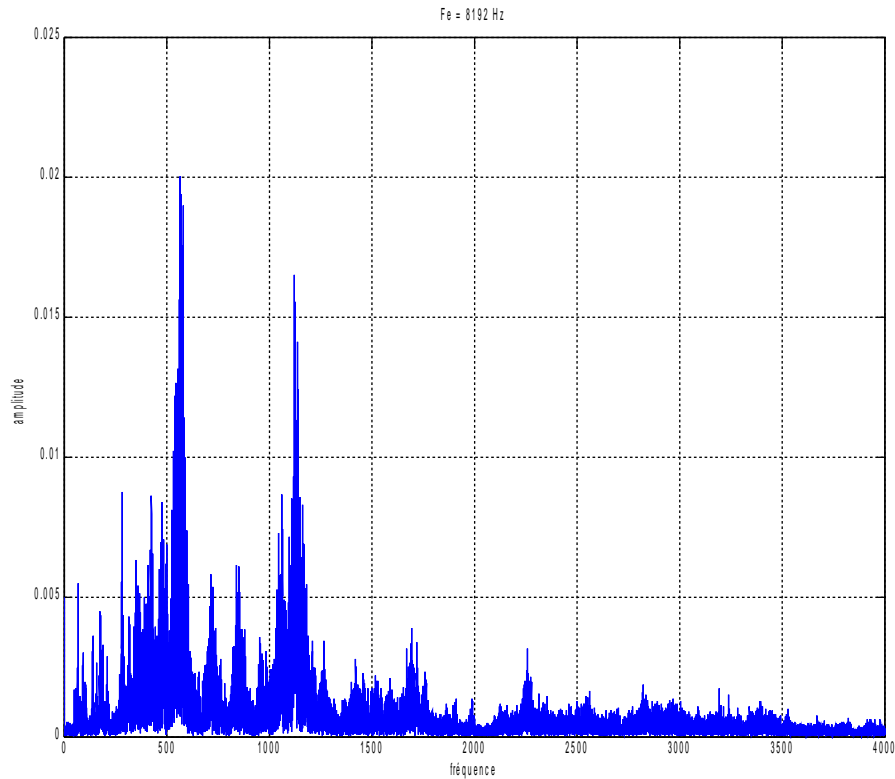


$$f_e = 1,4 \text{ kHz}$$

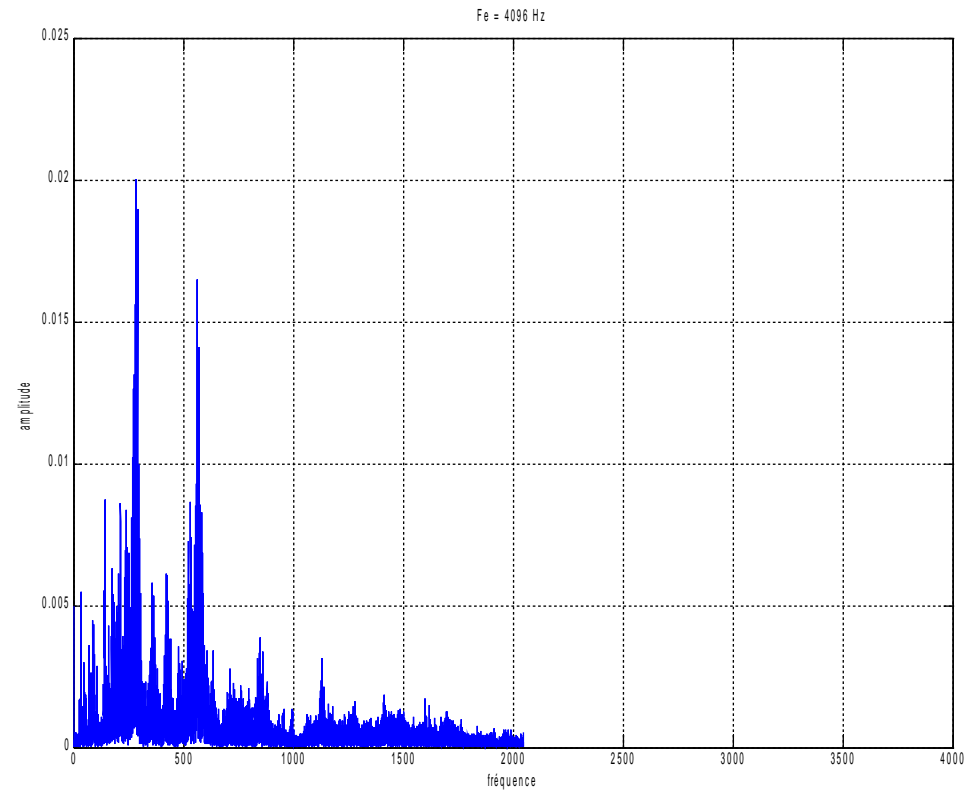


$$f_e = 0,8 \text{ kHz}$$

Repliement (non respect de Shannon)



Échantillonnage à 8 kHz
(pas de repliement)



Échantillonnage à 4 kHz
(avec repliement)

- Un exemple bien connu:

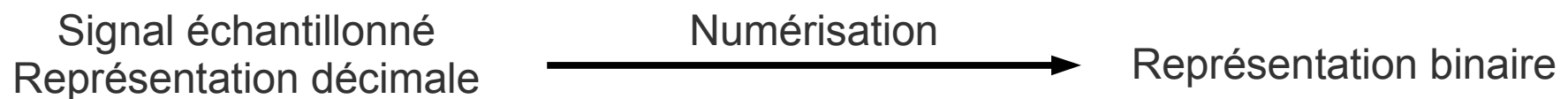
Une roue de chariot possède 8 rayons identiques. En mouvement elle est filmée par une caméra qui prend 24 images par secondes.

A quelle(s) vitesse(s) de rotation la roue apparaîtra-t-elle comme fixe ?

- Le théorème de Shannon est une formulation du phénomène de stroboscopie.
- Pour éviter des effets parasites de signaux haute fréquence, il est nécessaire avant échantillonnage d'effectuer un filtrage analogique pour supprimer tous les signaux de fréquence supérieure à $f_e / 2$: filtre anti-repliement.

1. Signal analogique – Signal numérique
2. Claude Elwood SHANNON
3. Échantillonnage
4. **Numérisation**

- Le résultat de l'échantillonnage est un tableau de nombres réels
- Les machines numériques travaillent en binaire avec deux caractéristiques :
 - Elles utilisent 2 chiffres « 0 » et « 1 »
 - Les mémoires de stockage sont limitées → le nombre de chiffres pour représenter un nombre est limité
- La numérisation doit résoudre ce problème : représenter un nombre réel avec des « 0 » et des « 1 » en nombre limité.



La technologie la plus utilisée étant l'électronique, la méthode la plus élémentaire pour coder les bits « 0 » et « 1 » consiste à leur attribuer deux tensions différentes :

TTL	« 0 » → 0 volts	« 1 » → 5 volts
RS232	« 0 » → +12 volts	« 1 » → -12 volts
CD	Absence ou présence de faisceau réfléchi	

Bien d'autres méthodes existent pour l'USB, le wifi, les téléphones portables ... et des méthodes optiques (code barre, QR-code)



Les systèmes de numération utilisés sont dits de position.
L'affichage numérique des appareils de mesure a introduit une nouvelle appellation pour les chiffres : le digit (digital unit)

En base 10, les nombres sont écrits à l'aide des 10 digits, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, tels que :

$$x = \sum x_{10,i} 10^i$$

Conventions :

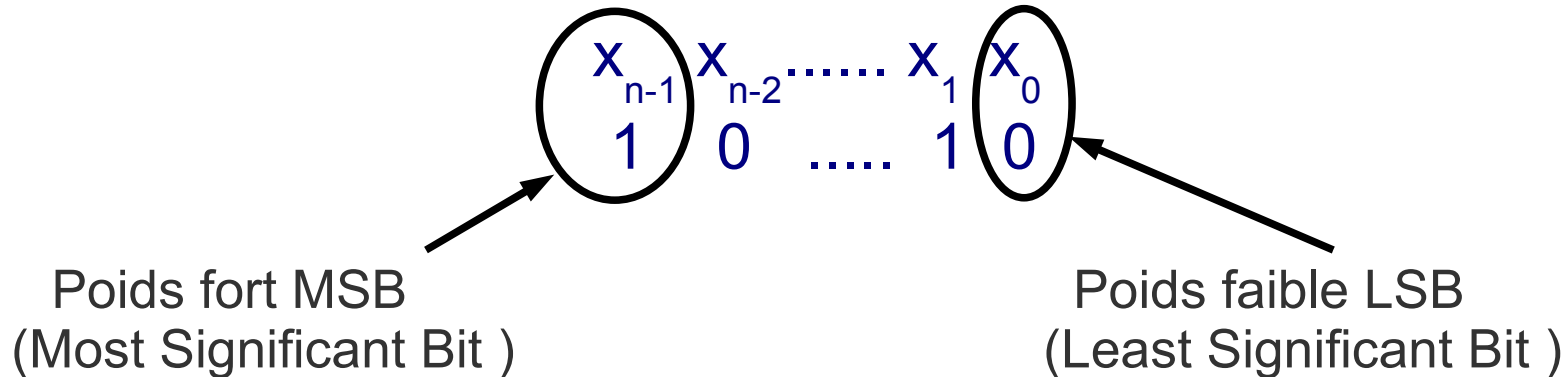
Le chiffre le plus à gauche a le plus fort poids

Le chiffre le plus à droite a le poids le plus faible

$$1025 = (1 \times 1000) + (0 \times 100) + (2 \times 10) + (5 \times 1)$$

$$1025 = (1 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$$

En base 2, les nombres sont écrits à l'aide des 2 digits 0 et 1
(appelés aussi bits pour binary digits) tels que :



Un nombre en base 2 a une représentation décimale en utilisant comme poids les puissances de 2 successives :

$$x = \sum x_{2,i} 2^i$$

$$1101 = (1 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$$

$$1101 = (1 \times 8) + (1 \times 4) + (0 \times 2) + (1 \times 1) = 13$$

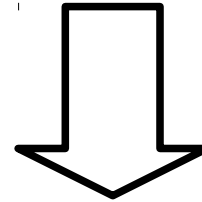
1101 a comme représentation décimale 13

13 a comme représentation binaire 1101

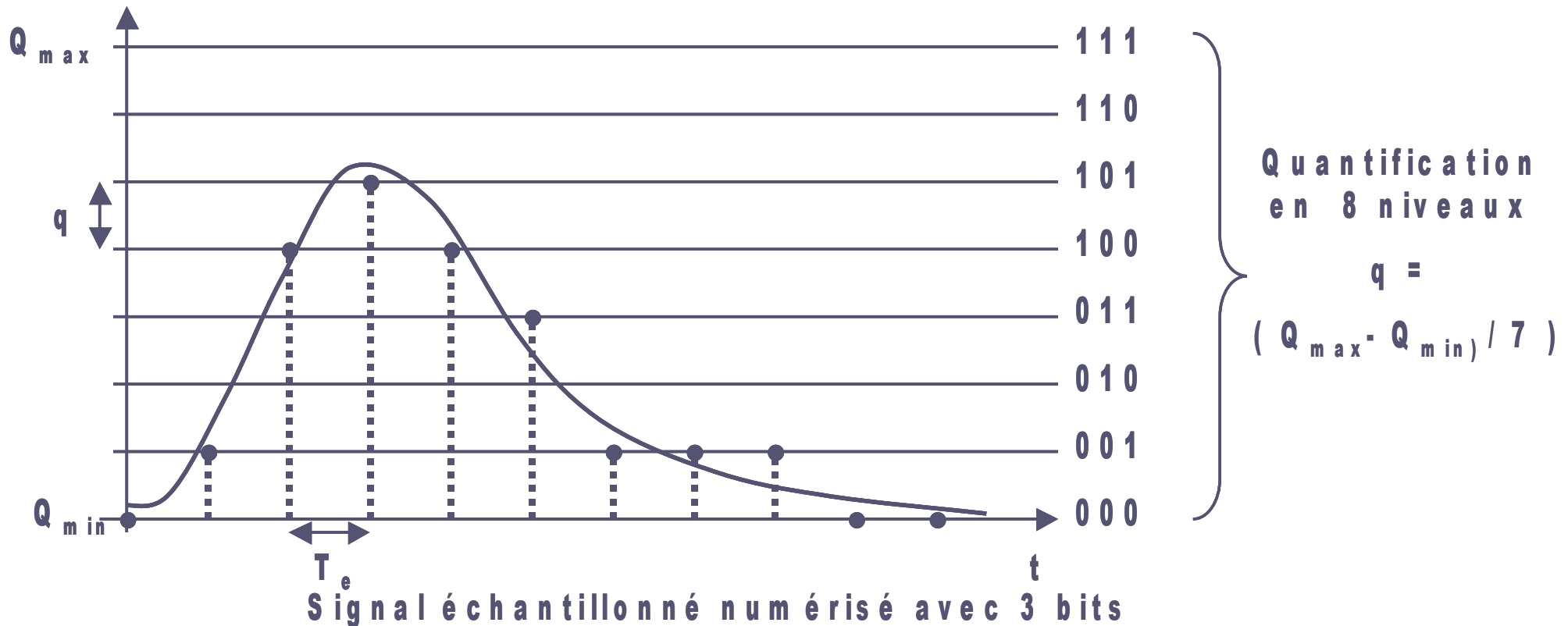
Exercice :

- *Pour un nombre de 3 bits indiquer la valeur décimale de chacun des chiffres possibles (porter les indications dans les deux premières lignes du tableau)*
- *Nous mesurons une température comprise entre 0°C et 20°C. Les mesures seront numérisées avec 3 bits en utilisant le maximum de l'échelle et un intervalle identique entre chaque valeur. Dans la troisième ligne du tableau indiquer les températures correspondant à chaque code binaire.*
- *Nous mesurons une température de 15°C. Quel code binaire lui sera attribué ? Quelle valeur attribuera-t-on à ce nombre lors de sa relecture ?*

Nombre fini de chiffres



Quantification de la mesure



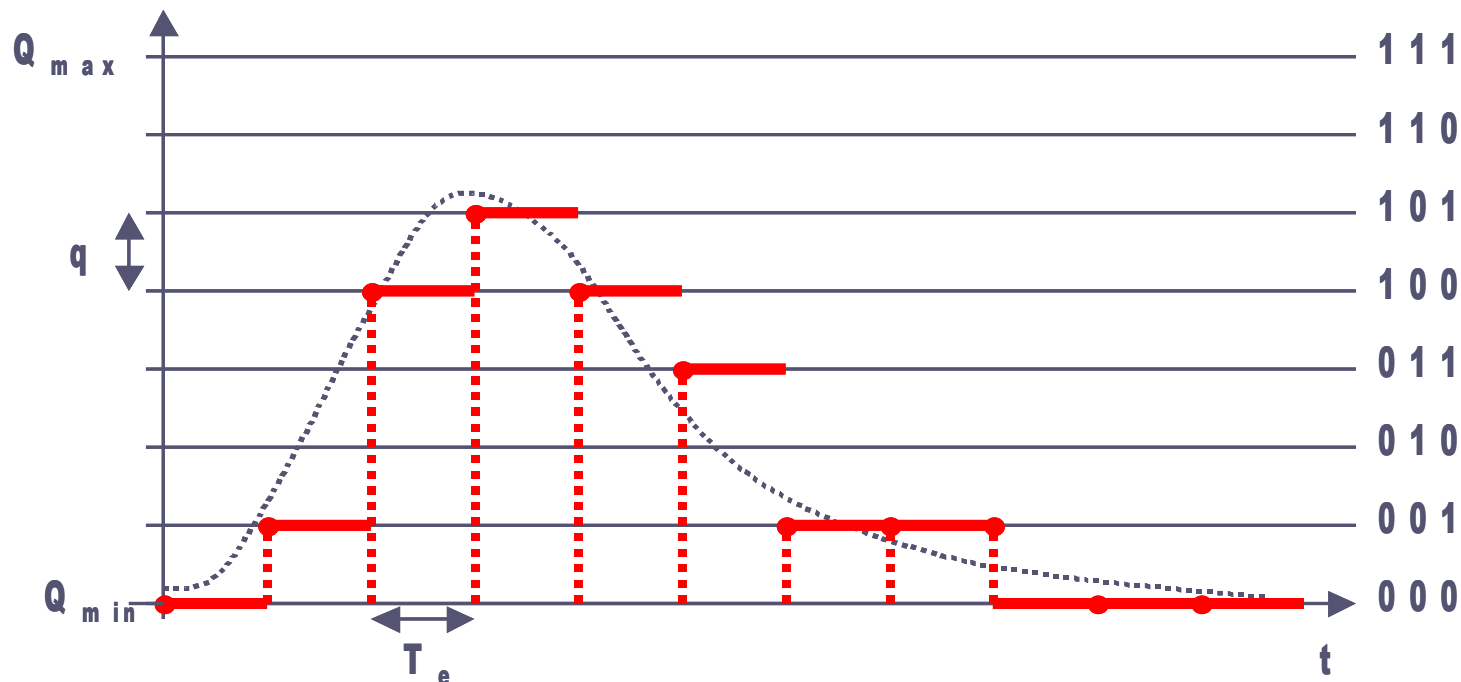
- En numération binaire, avec N bits il y a 2^N nombres possibles ayant pour valeurs en décimal : $\{ 0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 2^N - 1 \}$.
- Le pas relatif de quantification est de $1/(2^N - 1)$. C'est la plus petite valeur mesurable qui correspond aussi à celle du bit de poids faible, elle est appelée aussi le LSB.

N	4	8	10	12	16	24
2^N	16	256	1024	4096	65536	16777216
$1/(2^N - 1)$	6,67E-02	3,92E-03	9,78E-04	2,44E-04	1,53E-05	5,96E-08

Le convertisseur analogique numérique (CAN, ou Analog Digital Converter, ADC): il effectue les deux opérations :

Discrétisation et numérisation

Le convertisseur numérique analogique (CNA, ou Digital Analog Converter, DAC): il effectue l'opération inverse permettant d'obtenir un signal continu. D'une manière générale ce signal est donc quantifié et sa valeur entre deux instants d'échantillonnage est maintenue : blocage



CONCLUSIONS

- Moins de problème de tolérance
- Meilleure résistance au bruit, possibilité de régénérer le signal.
- Association de données de types différents (son, image, texte) sur un même support.
- Accès au monde informatique (qui ne comprend que des valeurs binaires) : software beaucoup plus flexible que hardware.

Inconvénients du numérique

- Plus lent
- Représentation déformée du signal
 - L'information est altérée (de manière connue, mais une seule fois à la numérisation).
- Quantification et bruit de quantification

- On échantillonne en x et y (au lieu du temps).
- On quantifie les niveaux de couleur (au lieu de l'amplitude).



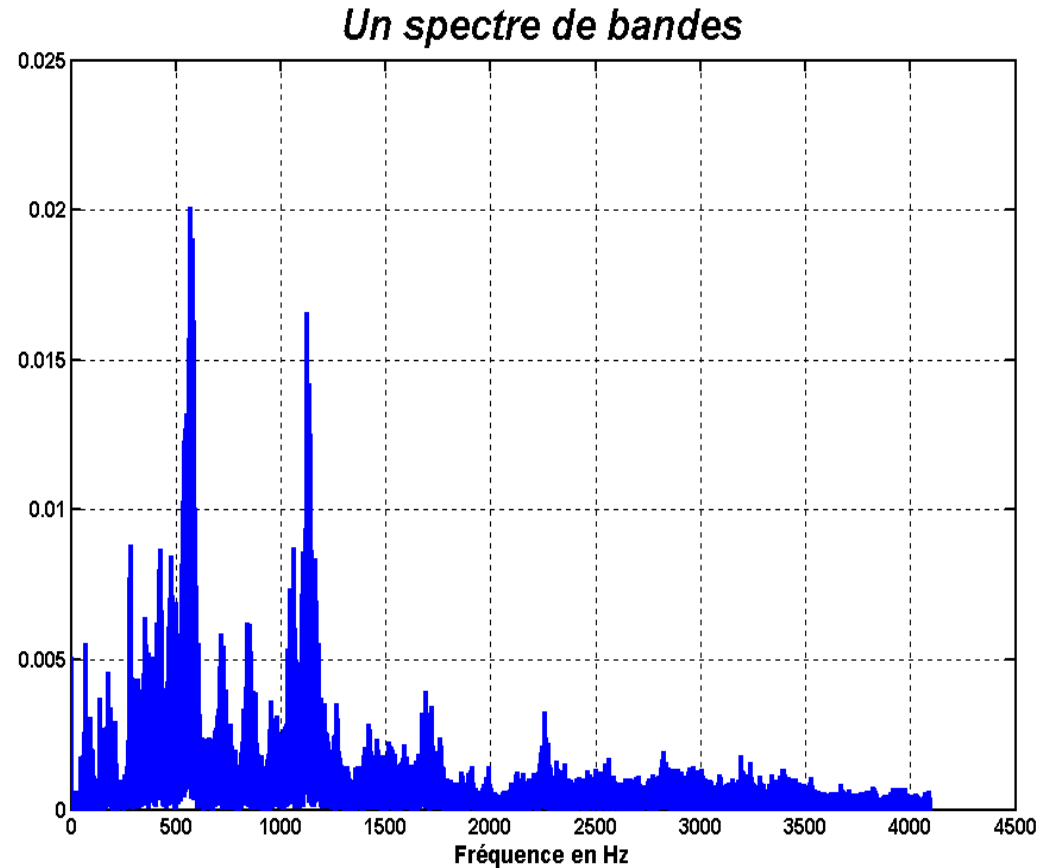
Culture Scientifique de Base en Sciences pour l'ingénieur

Le Signal : De l'analogique au numérique

***Les exercices
à préparer
pour la semaine prochaine***

Nous souhaitons numériser le signal dont le spectre est fourni ci-contre. Parmi les fréquences d'échantillonnage suivantes :

- $f_s = 32 \text{ kHz}$
- $f_s = 4,5 \text{ kHz}$
- $f_s = 2,5 \text{ kHz}$



Quelle(s) est(sont) celle(s) qui conviennent à cette opération ?

Le codec (codeur-décodeur) de mon ordinateur me propose de créer un fichier son « numérique » avec les caractéristiques suivantes:

- $f_s = 11025 \text{ Hz}$
- *Nombre de bits $N = 8$*

Quelles en sont les conséquences sur le signal qui est numérisé ?

Une scène est filmée avec une caméra.

Le mouvement le plus rapide de la scène correspond à une période de 100 ms.

Pour échantillonner (et donc filmer) correctement combien d'images par secondes seront-elles nécessaires ?

Un appareil mesure une température comprise entre $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ et $60\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Cette mesure est stockée numériquement avec un codage 7 bits.

Pour exploiter les mesures une précision de $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ est nécessaire.

Le choix de cette numérisation est-il judicieux ?

Citer au moins deux avantages du numérique.

Exercice D : Codage de l'Information – Image bitmap

Exemple du format Bitmap :

*Bitmap signifie littéralement « carte de bits ». C'est la façon la plus simple de coder une image : l'image est décrite point par point. Les points d'une image sont appelés des « pixels » (contraction de « picture elements »). Chaque pixel est décrit par un nombre indiquant sa couleur. L'image est donc représentée par une série de nombre, chacun représentant la couleur d'un pixel. Les bitmaps existent sous différents formats, selon le nombre de couleurs possibles pour un pixel. Le fichier contient également un en-tête comprenant différents renseignements, tels que ses dimensions et son format. Le codage est simple mais l'image Bitmap occupe beaucoup de place mémoire: les pixels sont petits, donc nombreux, ces résultats sont valables pour des Bitmaps **non compressés**.*

D.1- Bitmap monochrome (2 couleurs : noir et blanc donc 1 bit)

1. Combien de points peut-on décrire avec un octet ?
2. Combien faut-il d'octets pour stocker une image de 800 sur 600 pixels (taille d'un écran standard) dans ce format ? Exprimer le résultat en Ko.

D.2- Bitmap 4 bits (la couleur d'un point est codée sur 4 bits)

1. Combien de couleurs différentes peut-on coder sur 4 bits ?
2. Combien de points peut-on décrire avec un octet ?
3. Combien faut-il d'octets pour décrire une image de 800 sur 600 pixels avec ce format? Donner le résultat en kilooctets (Ko).

D.3- Bitmap 24 bits.

1. Combien peut-on coder de couleurs sur 24 bits ?
2. Combien faut-il d'octets pour décrire une image de 800 sur 600 pixels avec ce format? Donner le résultat en mégaoctets (Mo).